VALLEJO - ZAMBRANO

2011

FISICA VECTORIAL 2

Física Vectorial 2

© ING. PATRICIO VALLEJO AYALA, ING. MECÁNICO E.P.N., MSC.
JORGE ZAMBRANO O.

Octava Edición 2011 - Revisada

Diagramación e Impresión:
Ediciones **RODIN**
Vicente León No. 423 (N5-23) y Chile - La Tola
Telf.: 3 160-155 • Fax: 3 163 - 173
E-mail: ediciones_rodin@hotmail.es

I.S.B.N. 9978-52-1 (VII-09)
Registro Nacional de Derechos de Autor - No. 031671 (VIII-09)
Solucionario: **Serie No. 7545** (Inédito, publicación protegida no comercial)

Impreso en Ecuador

CONTENIDO

1. DINAMICA ROTACIONAL

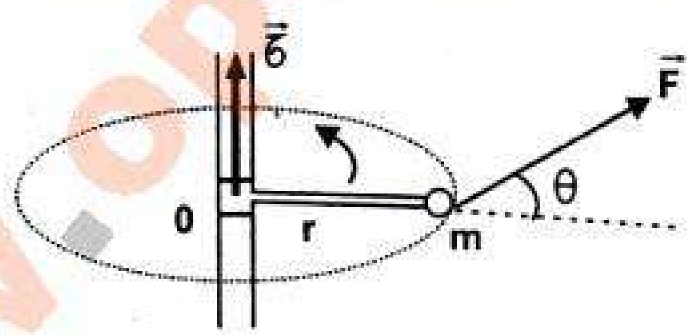
En el capítulo anterior se expuso que los efectos que puede causar la aplicación de una fuerza sobre un cuerpo son: deformación y/o traslación y/o rotación.

La dinámica de la traslación se estudió en base a la aplicación de las Leyes de Newton, sin embargo con lo tratado anteriormente no se puede todavía analizar dinámicamente que sucede con la rotación.

Al definir el torque producido por una fuerza, se dijo que era un cuantificador del efecto rotacional que producía la aplicación de la fuerza sobre algún punto (generalmente de un sólido) que no pertenezca a la línea de acción de ésta.

Al analizar la dinámica de la rotación, hay que determinar cual es la relación entre el torque y la rotación que produce.

Analicemos el sistema de la figura, en el que la aplicación de la fuerza $\vec{F}$ determina que la masa puntual m gire alrededor del punto O. Se considera que no existe ningún tipo de fricción y que todas las masas son despreciables (excepto la masa puntual m).



Para facilidad del análisis, se considera que la fuerza está contenida en el plano de rotación de la partícula m.

El torque producido por $\vec{F}$ respecto al punto O es:

$\vec{\tau}_o = \vec{r} \times \vec{F}$ y su módulo es:

$\tau_o = r \cdot F \cdot \text{sen}\theta$, donde $F \cdot \text{sen}\theta$ es la componente de la fuerza en la dirección tangencial.

$\tau_o = r \cdot F_T$ **(1)**

La ecuación de la segunda Ley de Newton en la dirección tangencial es:

$\Sigma F_T = m \, . \, a_T$

$F = m \, . \, a$ pero $a_T = \alpha \, . \, r$, entonces:

$F = m \, . \, r \, . \, \alpha$ **(2)**

Reemplazando (2) en (1):

$\tau_o = r \, . \, F_T = (m \, . \, r^2) \, . \, \alpha$

Es conveniente aclarar que la componente normal (centrípeta) de la fuerza F, no produce rotación de la partícula alrededor de O.

Resumiendo lo anterior se tiene que para una masa puntual m, restringida a girar en torno a un eje y sujeta a la acción de una fuerza neta F:

$\tau_o = m \, . \, r^2 \, . \, \alpha$ **(3)** donde:

τ_o es el torque de la fuerza F respecto al eje considerado.

r es la distancia perpendicular de la partícula m al eje.

1.1 MOMENTO DE INERCIA

En la ecuación $\tau = (m \, r^2) \, \alpha$, el producto $m \, r^2$ se denomina momento de inercia, o inercia rotacional de la partícula que gira alrededor del punto O. Se le representa por la letra I:

$$I = m \, r^2 \qquad \textbf{(1.1.1)}$$

El momento de inercia no depende únicamente de valor de la masa de la partícula, sino que también es función de la geometría (r), es decir de la distribución (distancia) de la masa alrededor del eje. Es decir que para una partícula hay tantos momentos de inercia, como ejes respecto a los cuales se los calcula.

Si se tuviese un sistema de n partículas, el momento de inercia respecto a un eje (o) es:

$$I_o = m_1 \, . \, r_1^2 + m_2 \, . \, r_2^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + m_n \, . \, r_n^2 = \sum_{i=0}^{n} m_i r_i^2 \qquad \textbf{(1.1.2)}$$

Donde r_i es la distancia perpendicular de la partícula de masa m_i hasta el eje O.

Unidades: el momento de inercia es una magnitud escalar, cuyas unidades son las de una masa multiplicadas por una de longitud elevada al cuadrado.

En el SI: $m \, . \, r^2 = I$
$1[kg].1[m^2] = 1[kg.m^2]$

en el CGS: $m \, . \, r^2 = I$
$1[g].1[cm^2] = 1[g.cm^2]$

Dimensiones:

$I = m \, . \, r^2$
$[I] = [M] \, . \, [L^2]$
$[I] = [ML^2]$

1.2 RADIO DE GIRO

Dado un sistema de partículas, el radio de giro es la distancia L a un eje al cual una partícula de masa igual a la masa total del sistema tendría el mismo momento de inercia que el sistema original, es decir:

$I_{(O,O')} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \ldots\ldots + m_n r_n^2 = M R_G^2$, donde:

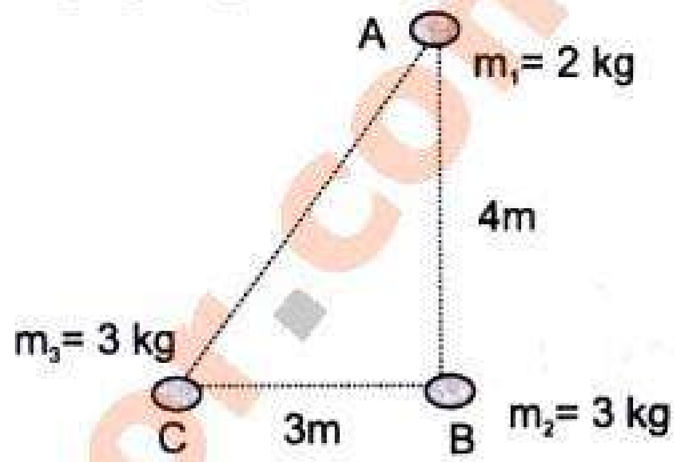
$R_G = \sqrt{\dfrac{I}{M}}$ y

$M = m_1 + m_2 + \ldots. + m_n =$ (masa total del sistema)
$R_G =$ radio de giro

Ejemplo:

Calcular el momento de inercia y el R_G del sistema de tres partículas de la figura respecto:

a) Al eje perpendicular al plano del libro que pasa por A
b) Al eje perpendicular al plano del libro que pasa por B
c) Al eje AB
d) Al eje AC



a) $r_{1(A)} = 0$
$r_{2(A)} = 4m$
$r_{3(A)} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5m$

$$I_A = m_1 r_{1\,(A)}^2 + m_2 r_{2\,(A)}^2 + m_3 r_{3\,(A)}^2$$
$$I_A = 2kg(0) + 3kg(4m)^2 + 3kg(5m)^2$$
$$I_A = 0 + 48\ (kg.m^2) + 75\ (kg.m^2)$$
$$I_A = 123\ (kg.m^2)$$

$$R_G = \sqrt{\frac{I_A}{M}} = \sqrt{\frac{123\ kg.m^2}{8\ kg}} = 3{,}92\ m$$

b) $r_{1(B)} = 4m$
$r_{2(B)} = 0$
$r_{3(B)} = 3m$

$$I_B = m_1 r_{1\,(B)}^2 + m_2 r_{2\,(B)}^2 + m_3 r_{3\,(B)}^2$$
$$I_B = 2kg(4m)^2 + 3kg(0)^2 + 3kg(3m)^2$$
$$I_B = 32\ (kg.m^2) + 0 + 27\ (kg.m^2)$$
$$I_B = 59\ (kg.m^2)$$

$$R_G = \sqrt{\frac{I_B}{M}} = \sqrt{\frac{59\ kg.m^2}{8\ kg}} = 2.71\ m$$

c) $r_{1(AB)} = 0$
$r_{2(AB)} = 0$
$r_{3(AB)} = 3m$

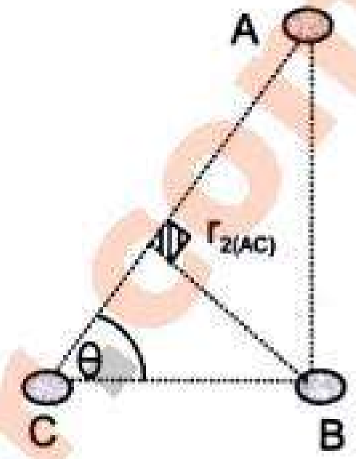
$$I_{AB} = m_1 r_{1\,(AB)}^2 + m_2 r_{2\,(AB)}^2 + m_3 r_{3\,(AB)}^2$$
$$I_{AB} = 2kg(0) + 3kg(0) + 3kg(3m)$$
$$I_{AB} = 0 + 0 + 27\ kg.m^2$$
$$I_{AB} = 27\ (kg.m^2)$$

$$R_G = \sqrt{\frac{I_{AB}}{M}} = \sqrt{\frac{27\ kg.m^2}{8\ kg}} = 1.84\, m$$

d) $r_{1(AC)} = 0$

$r_{2(AC)} = CB.\text{sen}\theta = 12/5\text{ m}$; $\text{sen}\theta = 4/5$, en el triángulo ABC

$r_{3(AC)} = 0$



$$I_{AC} = m_1 r_{1\,(AC)}^2 + m_2 r_{2\,(AC)}^2 + m_3 r_{3\,(AC)}^2$$

$I_{AC} = 2\text{kg}(0) + 3\text{kg}(12/5\text{m})^2 + 3\text{kg}(0)$

$I_{AC} = 0 + 17.28\text{ kg.m}^2 + 0$

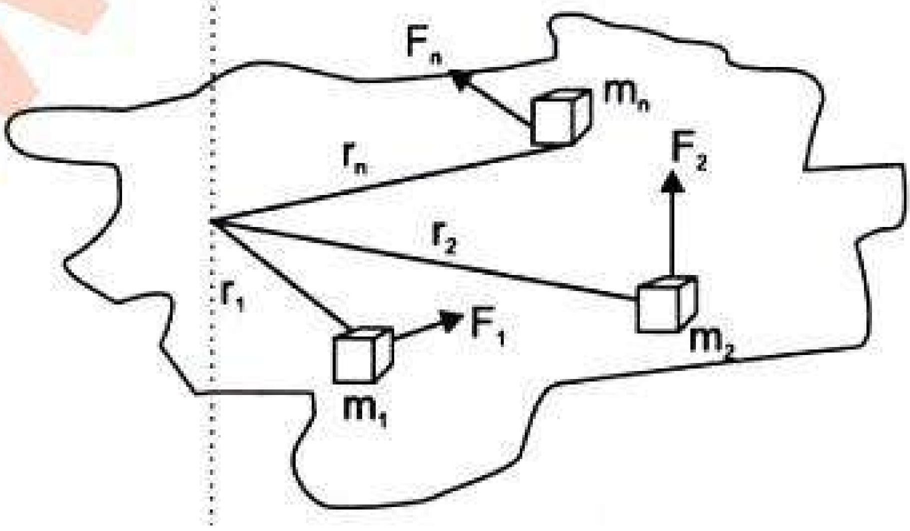
$I_{AC} = 17.28\text{ (kg.m}^2\text{)}$

$$R_G = \sqrt{\frac{I_{AC}}{M}} = \sqrt{\frac{17.28\ kg.m^2}{8\ kg}} = 1.47\, m$$

1.3 ROTACION DE UN CUERPO RIGIDO

La generalidad de objetos con que se trata son realmente cuerpos extensos y no deberían ser tratados como partículas o sistemas de partículas. En estos casos el cuerpo puede ser analizado como una distribución continua de masa.

El análisis matemático requerido rebasa los límites de esta obra, sin embargo como una aproximación podría considerarse que un sólido está constituido por un conjunto de partículas y cada una de estas sujeta a la acción de una fuerza neta externa.



El torque producido por cada fuerza alrededor del eje es:

$\tau_1=(m_1 r_1^2)\,\alpha_1$ según la ecuación (3)

$\tau_2=(m_2 r_2^2)\,\alpha_2$ generalizando tenemos:

$\tau_n=(m_n r_n^2)\,\alpha_n$

Como el cuerpo es rígido, todos los puntos tendrán en cada instante las mismas aceleraciones angulares, por lo que al sumar las ecuaciones anteriores se tiene:

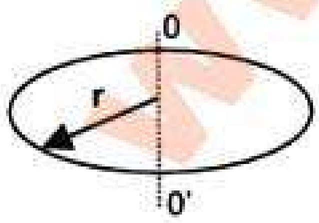
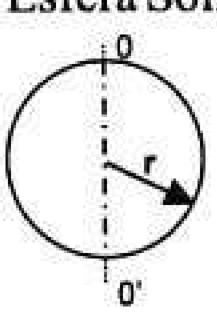
$$\tau_1+\tau_2+....+\tau_n=\alpha[(m_1 r_1^2)+(m_2 r_2^2)+......+(m_n r_n^2)]$$

$$\Sigma\tau_i=\alpha\Sigma m_i r_i^2 \text{ pero } \Sigma m_i r_i^2=I_{TOTAL}$$

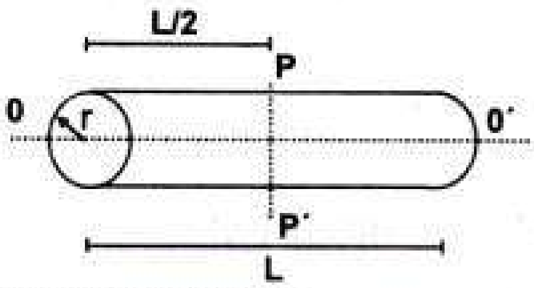
$$\tau_{TOTAL}=\alpha.I_{TOTAL} \qquad \textbf{(1.3.1)}$$

El momento de inercia de sólidos rígidos homogéneos generalmente se lo puede determinar en tablas, donde se especifica siempre respecto a que eje se ha realizado el cálculo.

A continuación se muestran cuerpos regularmente usados y el momento de inercia respecto a los ejes más comunes:

OBJETO	**MOMENTO DE INERCIA**
Aro 	$I_{oo'}=m.r^2$
Disco 	$I_{oo'}=½.\,m.r^2=mr^2/2$
Esfera Sólida 	$I_{oo'}=2/5.m.r^2=2mr^2/5$

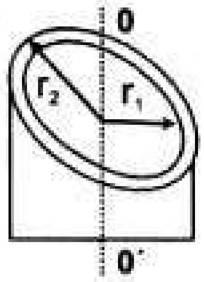
Cilindro sólido



$I_{oo'} = \frac{1}{2}. m.r^2 = mr^2/2$

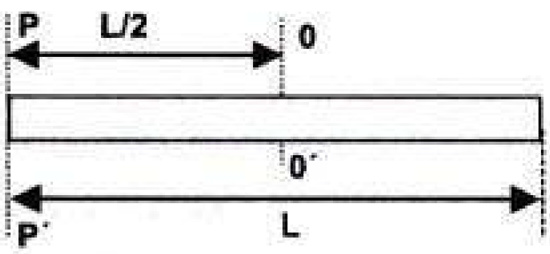
$I_{pp'} = \frac{1}{4}. m.(r^2+L^2/3) = m.(r^2+L^2/3)/4$

Cilindro hueco



$I_{oo'} = \frac{1}{2}. m(r_1^2+r_2^2) = m(r_1^2+r_2^2)/2$

Varilla delgada



$I_{oo'} = 1/12. mL^2 = mL^2/12$

$I_{pp'} = 1/3. mL^2 = mL^2/3$

1.4 SEGUNDA LEY DE NEWTON PARA LA ROTACION

La ecuación $\Sigma \tau = I.\alpha$ generalmente se denomina la Segunda Ley de Newton para la rotación. Es similar a la Segunda Ley de Newton definida en la traslación pero no tan fundamental, puesto que se deriva de esta.

De lo anterior se concluye que el análogo rotacional de la fuerza es el torque, y el análogo rotacional de la masa es el momento de inercia. Es decir el agente que causa exclusivamente la traslación de un cuerpo es la fuerza y el agente que causa exclusivamente la rotación es el torque.

La oposición al cambio de estado en la traslación es la masa y quien cuantifica la oposición de un cuerpo a la rotación es el momento de inercia.

La correlación entre la traslación y la rotación se representa en el siguiente cuadro:

TRASLACIÓN	ROTACIÓN
Fuerza (F)	Torque (τ)
Masa (m)	Momento de Inercia (I)
Aceleración (a)	Aceleración angular (α)
$\Sigma F = m.a$	$\Sigma\tau = I.\alpha$

Para resolver situaciones donde interese la rotación de un cuerpo en un plano fijo se deben seguir los mismos pasos mencionados en la dinámica de la traslación, y al aplicar la ecuación de la Segunda Ley de Newton, también hacerla con relación a la rotación.

El momento de inercia, dependiendo del caso, se lo puede calcular u obtener de tablas.

Ejemplos:

1. Una piedra de esmeril de masa 1 kg. y radio 15 cm. está rotando con una velocidad de 360 rev/min, cuando el motor se apaga. ¿Qué fuerza tangente a la rueda debe aplicarse para que se detenga luego de 20 rev. (el momento de inercia de la piedra es $\frac{1}{2}.m.r^2$)?

$m = 1\ kg$
$r = 0.15\ m$
$\omega_o = 360\ rev/min = 37.7\ (rad/s)$
$\Delta\theta = 20\ rev = 125.66\ rad$
$\omega_F = 0$

$$\overset{0}{\cancel{\omega_F^2}} = \omega_o^2 - 2\alpha\Delta\theta$$

$$\alpha = \frac{\omega_o^2}{2.\Delta\theta} = \frac{(37.7\ rad/s)^2}{2(125.66\ rad)} = 5.66\ (rad/s^2)$$

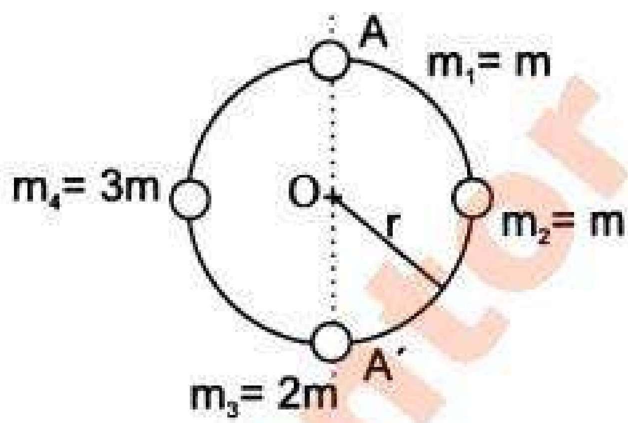
$\tau = I.\alpha$ como $I = \frac{1}{2}.m.r^2$ tenemos:
$F.r = \frac{1}{2}.m.r^2.\alpha$
$F = \frac{1}{2}m.r.\alpha = \frac{1}{2}(1Kg)(0.15\ m)(5.66\ rad/s^2)$
$F = 0.42\ (N)$

2. Las cuatro masas de la figura se mantienen rígidas mediante el aro de masa despreciable allí mostrado. Determinar:

   a) El momento de inercia y el radio de giro del sistema respecto a un eje que pasa por el centro del círculo (O) en dirección perpendicular a la página.

   b) El torque que debería aplicarse al sistema para comunicarle una aceleración angular (α) en torno al mismo eje, suponiendo que puede girar libremente.

   c) Las incógnitas anteriores en relación al eje AA'.



a) $I_0 = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2$

$r_1 = r_2 = r_3 = r_4 = r$

$I_0 = mr^2 + mr^2 + 2mr^2 + 3mr^2 = 7mr^2$

$$R_G = \sqrt{\frac{I_o}{M}} = \sqrt{\frac{7mr^2}{7m}} = r$$

b) $\tau_0 = I_0 \,.\, \alpha$

$\tau_0 = 7mr^2 \,.\, \alpha$

c) $I_{AA'} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + m_3 r_3^2 + m_4 r_4^2$

$r_1 = r_3 = 0\,;\ r_2 = r_4 = r$

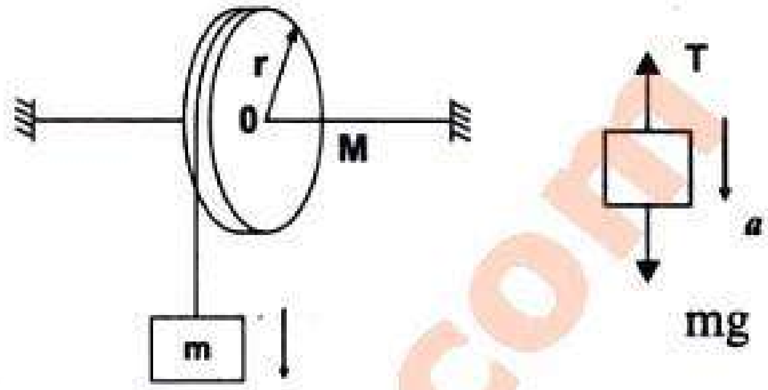
$I_{AA'} = mr^2 + 3mr^2 = 4mr^2$

$$R_G = \sqrt{\frac{I_{AA'}}{M}} = \sqrt{\frac{4mr^2}{7m}} = 0{,}76r$$

$\tau_{AA'} = I_{AA'} \,.\, \alpha$

$\tau_{AA'} = 4mr^2 \,.\, \alpha$

3. Una polea de 50 cm. de diámetro y 10 kg. de masa esta montada sobre un eje horizontal sin fricción. Mediante una cuerda enrollada en el borde se suspende una masa de 0.2 kg. Si al soltar la masa ésta desciende 2m. en 4s, determinar cuál es el radio de giro de la rueda.



M= 10 kg.
m= 0.2 kg
Φ= 50 cm ; r= 0.25 m.

Calculamos la aceleración de (m):

d= 2m
Δt= 4s
Vo = 0

$$d = \cancel{Vo}^{\,0} . \Delta t + 1/2\, a . \Delta t^2$$

$$a = \frac{2d}{\Delta t^2} = \frac{2(2\,m)}{(4\,s)^2} = 0{,}25\,(m/s^2)$$

$\Sigma Fy = m.a$
$mg - T = ma$
$T = mg - ma$
$T = 0{,}2\,Kg\,(9{,}8\,m/s^2 - 0{,}25\,m/s^2)$
$T = 1{,}91\,(N)$

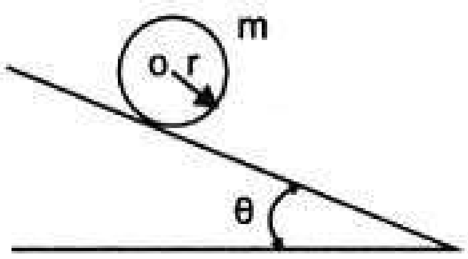
En la rueda: la aceleración tangencial de un punto en su borde es igual a la aceleración de la masa (m), de donde:

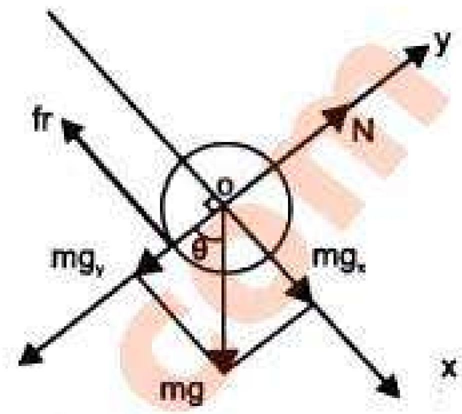
$$a = \alpha.r \rightarrow \alpha = \frac{a}{r} = \frac{0{,}25\, m/s^2}{0{,}25\, m} = 1\,(rad/s^2)$$

$$\tau_o = I_o . \alpha = M.R_G^{\,2} . \alpha\,; \quad \tau_o = T.r$$

$$R_G = \sqrt{\frac{T.r}{M.\alpha}} = \sqrt{\frac{1{,}91(N).0{,}25m}{10\,kg\,.\,1\,rad/s^2}} = 0{,}22\,m$$

4. El cilindro sólido uniforme de masa m mostrado en la figura, rueda sin resbalar, hallar:
   a) La aceleración de su centro O.
   b) La fuerza de rozamiento que actúa sobre el cilindro.





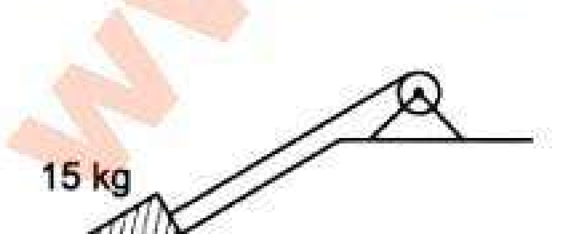
$\Sigma Fx = m.a$
$mg_x - fr = ma$
$mg . sen\,\theta - fr = ma$ **(1)**

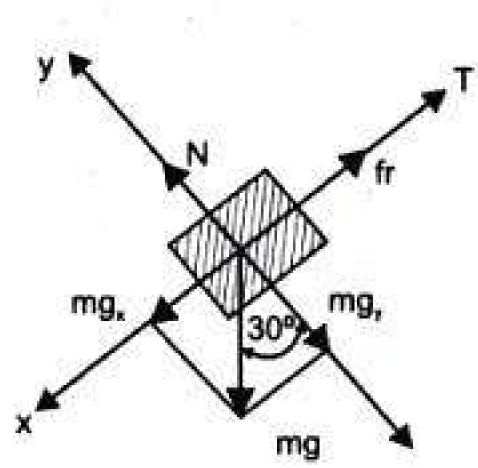
$\Sigma\tau_o = I_o . \alpha$
$fr.r = 1/2\, mr^2 . \alpha$; como $\alpha = a/r$
$fr = ½\, ma$ **(2)**

a) Reemplazando (2) en (1):
$mg . sen\,\theta - 1/2\, ma = ma$
$a = 2/3 . g. sen\ \theta$

b) Reemplazando el valor de a en (2):
$fr = 1/2\, m . (2/3) . g. sen\ \theta$
$fr = 1/3 . m . g . sen\ \theta$

5. El momento de inercia de la rueda mostrada en la figura es 10 kgm^2. El radio de la rueda es 25 cm. Determinar la aceleración angular de la rueda producida por la masa de 15 kg. si la fuerza de rozamiento entre la masa y el plano inclinado es de 40 (N).





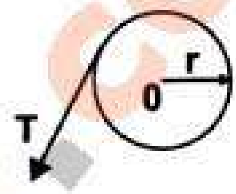
m = 15 kg
fr = 40 (N)

$\Sigma Fx = m.a$
$mg_x - fr - T = ma$
$mg . \text{sen } 30° - fr - T = ma$
$33{,}5 - T = 15a$ **(1)**

En la rueda:

$\Sigma \tau_o = I_o . \alpha$ como $\alpha = \dfrac{a}{r}$

$I_o = 10 \, kgm^2$
$r = 25 \, cm = 0.25 \, m$



$T . r = I_o \dfrac{a}{r}$

$T = \dfrac{I}{r^2} . a = \dfrac{10 \, kg.m^2}{(0{,}25m)^2} .a$

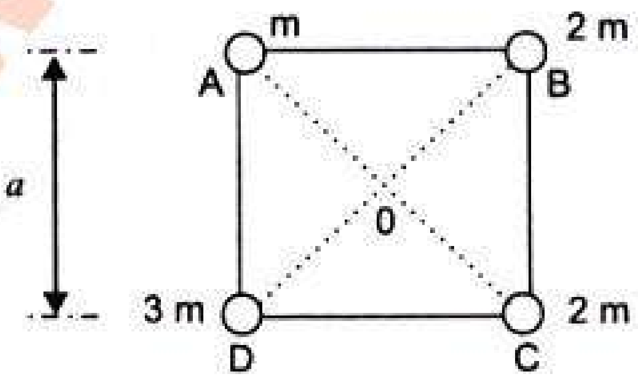
$T = 160 \, a$ **(2)**

Reemplazando (2) en (1):
$33.5 - 160a = 15a$
$33.5 = 175 \, a$
$a = 0.19 \, m/s^2$

$\alpha = \dfrac{a}{r} = \dfrac{0{,}19 \, m/s^2}{0{,}25m} = 0{,}77 \, (rad/s^2)$

1.5 EJERCICIO No. 1

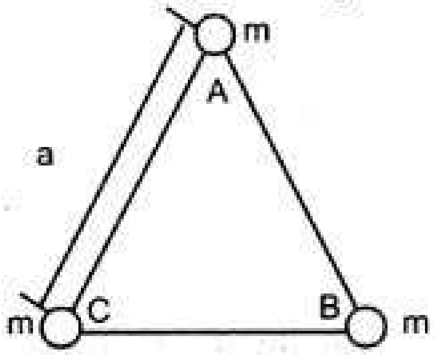
1. En el sistema de la figura, las varillas rígidas que forman el cuadrado tiene masas despreciables y las masas ubicadas en los vértices se consideran puntuales, calcular:



a) El momento de inercia del sistema y su radio de giro respecto a los ejes AB, BC, CD, DA, AC y BD

b) El momento de inercia respecto a un eje perpendicular al plano del cuadrado que pase por el centro O.

2. Tres masas iguales se fijan a los vértices del triángulo equilátero ABC determinar el momento de inercia del sistema respecto a:



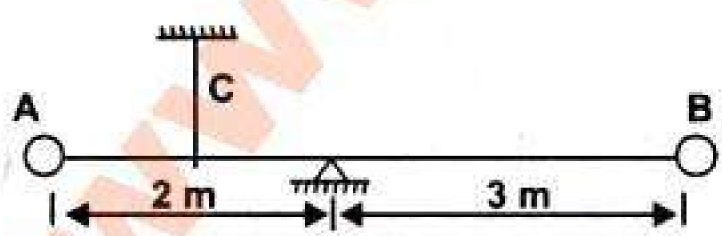
a) Un eje que pase por un lado del triángulo

b) Un eje que contenga una altura del triángulo

c) Un eje perpendicular al plano del triángulo que pase por su centro.

3. Una varilla de longitud L está compuesta de una parte uniforme de acero de longitud 1/2L y masa m y una parte uniforme de aluminio de longitud 1/2L y masa m_a. Determinar el momento de inercia de la varilla respecto a un eje perpendicular a la varilla que pasa por su centro.

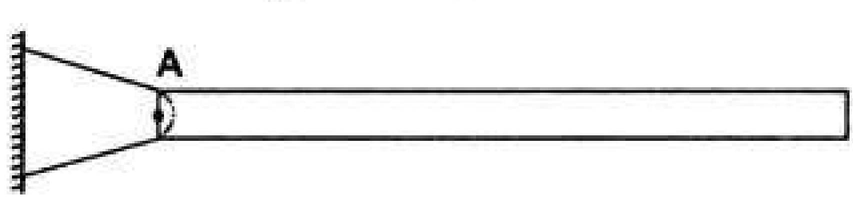
4. El sistema de la figura se mantiene en equilibrio debido a la acción de la cuerda C. Si se corta la cuerda, determinar el valor de la aceleración angular inicial de la varilla de peso despreciable que une las masas A y B.



$m_A = 30\text{ kg}$

$m_B = 10\text{ kg}$

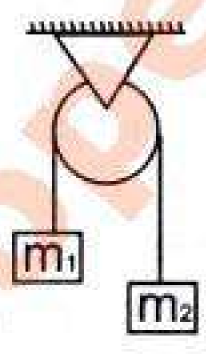
5. La varilla de la figura tiene una masa de 2 kg y una longitud de 1 m; está articulada en A y es sostenida en posición horizontal. Si se suelta la varilla, cuál es la aceleración angular inicial de ésta.



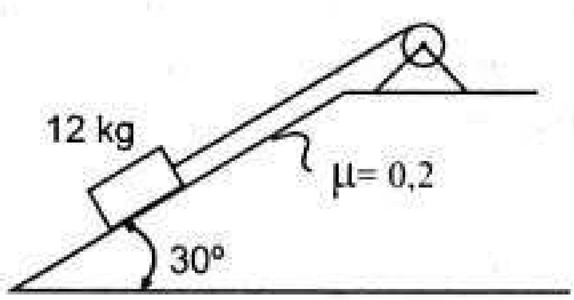
6. Una rueda montada en un eje tiene un momento de inercia de 10 $kg.m^2$ y se encuentra girando a 1800 rpm. La rueda es frenada uniformemente y llega a detenerse luego de 10 s. Hallar:
   a) La aceleración angular de la rueda
   b) El módulo del torque aplicado para frenar la rueda.

7. Una polea de 50 cm de diámetro y 20 kg de masa está montada sobre un eje horizontal sin fricción. Se suspende mediante una cuerda enrollada en su borde un bloque de 500 g, y al soltarlo éste desciende 3 m en 2 s. Calcular:
   a) La aceleración del bloque
   b) El radio de giro de la polea

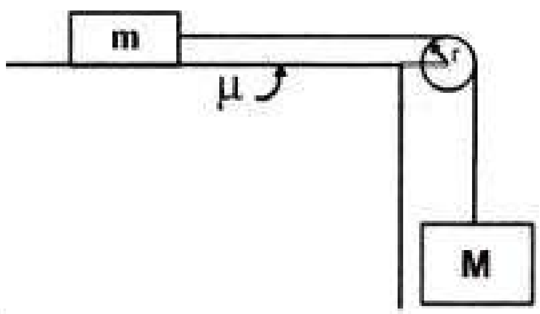
8. Dos masas $m_1 = 6$ kg y $m_2 = 10$ kg están unidas mediante un hilo delgado que pasa por una polea de 40 cm de diámetro y tienen un momento de inercia de 5 $kg.m^2$. Despreciando la masa del hilo y la fricción en el apoyo de la polea, determinar:
   a) La aceleración de cada masa
   b) La tensión en la cuerda, en los puntos que se une a m_1 y m_2



9. Un cuerpo de 12 kg se encuentra sobre el plano inclinado de la figura. El cuerpo está atado a una cuerda delgada que está enrollada en un cilindro homogéneo de 5 kg de masa y 20 cm de radio. Si el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo y el plano inclinado es μ= 0,2 y el sistema parte del reposo, calcular la aceleración de la masa.



10. En el sistema de la figura el momento de inercia de la rueda es 10 kg.m^2.
Hallar:



$m = 5\,kg$
$M = 20\,kg$
$\mu = 0.2$
$r = 20\,cm.$

a) La aceleración del bloque de masa M, si el sistema se abandona partiendo del reposo.
b) El tiempo en que el bloque M desciende una distancia de 1 m, después que es abandonado en reposo.
c) La tensión de la cuerda en la sección horizontal y en la sección vertical.

EVALUACION OBJETIVA

Completar:

1. El torque de una fuerza respecto a un punto tiene una dirección perpendicular al plano que contiene a los vectores .... y ....

2. Si una partícula gira alrededor de un eje fijo con M.C.U., el torque de la fuerza neta que actúa sobre la partícula con relación al centro de la trayectoria es ....

3. El momento de inercia de un cuerpo depende de..de este y de.. respecto al eje donde se lo calcule.

4. La oposición de un sólido al movimiento de rotación se cuantifica a través del ....

5. El momento de inercia de cualquier cuerpo puede expresarse como $I = M.k^2$ donde M es la masa de este y k es ....

6. El promedio del cuadrado de la distancia desde el eje a la masa del cuerpo se denomina ....

7. Un cuerpo puede tener tantos momentos de inercia, como .... respecto a los cuales se los calcule.

8. Los momentos de inercia de un cuerpo de uso frecuente se tabulan, bajo la condición de que la masa de estos está distribuida..

9. La masa de un cuerpo en la traslación representa los mismo que .... en la rotación.

10. La fuerza neta actuante sobre un cuerpo en la traslación, representa los mismo que .... en la rotación.

Escribir (V) verdadero o (F) falso:

1. Suponiendo que el Sol y la Tierra son esféricos y que la órbita de la Tierra es circular, se tiene que el momento de torsión (torque) que ejerce el Sol sobre la Tierra es nulo .... ( )

2. Si un cuerpo está en equilibrio, el momento de inercia de este para cualquier eje es nulo .... ( )

3. El momento de inercia de un cuerpo, únicamente depende del valor de la masa .... ( )

4. El momento de inercia de un cuerpo únicamente depende de la distancia de cada una de sus partes respecto al eje donde se lo evalúa. .... ( )

5. Un cuerpo puede tener un número indeterminado (infinito) de momentos de inercia. .... ( )

6. Si el torque neto que actúa sobre un cuerpo alrededor de un eje es nulo, significa que este permanece necesariamente en reposo. .... ( )

7. El radio de giro de un cuerpo o de un sistema de partículas siempre tiene un valor intermedio entre la mayor y menor distancia de las partes en relación al mismo eje. .... ( )

8. La dimensión del momento de inercia es $[ML^2]$ .... ( )

9. El momento de inercia de un cuerpo liviano puede ser mayor que el de un cuerpo pesado respecto a un mismo eje .... ( )

10. Si la velocidad angular de un cuerpo simétrico varía, sobre este actúa un torque neto diferente de cero. .... ( )

Subrayar la respuesta correcta:

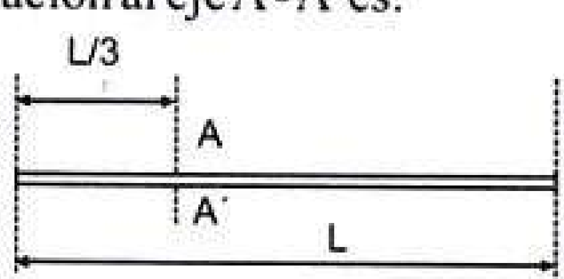
1. Si una partícula se mueve en un plano, el torque de la fuerza neta actuante sobre ella respecto a un punto del plano, siempre tiene un m ódulo igual a:
   a) r.Fc donde: r = módulo del vector posición
   b) $r.F_T$ Fc= módulo de la fuerza centrípeta (normal)
   c) r.F F_T = módulo de la fuerza tangencial
   d) N. R. A. F = módulo de la fuerza neta

2. El momento de inercia de un cuerpo o de un sistema de partículas, depende únicamente de:
   a) La masa total
   b) La distribución de la masa con relación al eje
   c) La masa y su distribución en relación al eje
   d) N.R.A.

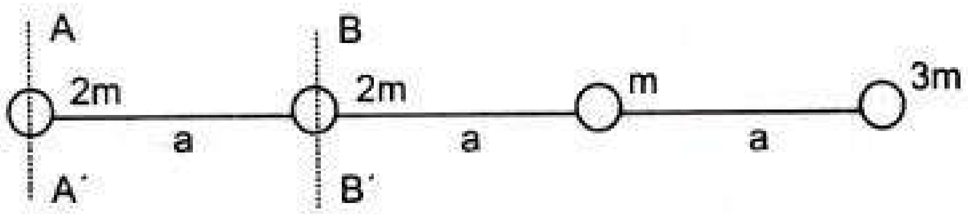
3. El momento de inercia de un cuerpo homogéneo respecto a un eje fijo, en un instante dado:
   a) Aumenta si el cuerpo se acelera
   b) Es nulo si el cuerpo está en reposo
   c) Permanece constante, sea cual fuere el estado cinemático de éste
   d) N.R.A.

4. El radio de giro de un sistema de partícula es:
   a) El promedio de la distancia de las partículas al eje
   b) La distancia a la que debería ubicarse una partícula de masa igual a la masa total del sistema, para que el momento de inercia de esta sea igual al del sistema, respecto al mismo eje.
   c) Constante para cualquier eje
   d) N.R.A.

5. Utilizando las expresiones tabuladas en la pag. 7, se determina que el momento de inercia de la varilla delgada de la figura en relación al eje A - A' es:
   a) $1/4.m.L^2$
   b) $1/6.m.L^2$
   c) $1/9.m.L^2$
   d) N.R.A.



6. Para las cuatro pequeñas masas mostradas en la figura, que están unidas por una varilla de masa despreciable se cumple que:



a) El momento de inercia respecto a AA' es igual al calculado respecto a BB'
b) El radio de giro respecto a BB' es mayor que el calculado respecto a AA'
c) El radio de giro respecto a AA' es $\sqrt{11/5}$ veces al calculado respecto a BB'
d) N.R.A.

7. Un sistema de n partículas están ubicadas sobre un marco circular de masa despreciable y de radio R, el radio de giro del sistema respecto a un eje que pasa por el centro y que sea perpendicular al plano del marco es:

a) Igual a R
b) Menor que R
c) Mayor que R
d) No se puede determinar

8. Una persona está sentada sobre un banco giratorio que tiene una velocidad angular ω. La persona tiene sus brazos extendidos horizontalmente con unas pesas iguales en cada mano. Si la persona acerca las pesas hacia su cuerpo, la velocidad angular:

a) Permanece igual
b) Aumenta
c) Disminuye
d) No se puede determinar

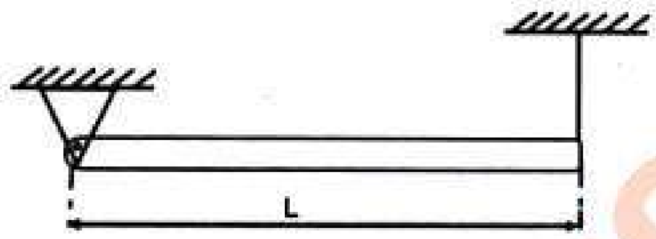
9. Una varilla de masa uniforme (m) se articula en un extremo y se sostiene en la posición horizontal por un hilo fijo en el otro extremo. Si se corta el hilo la aceleración angular de la varilla es:

a) $\frac{1}{3}\frac{g}{L}$

b) $\frac{1}{3}\frac{g}{}$

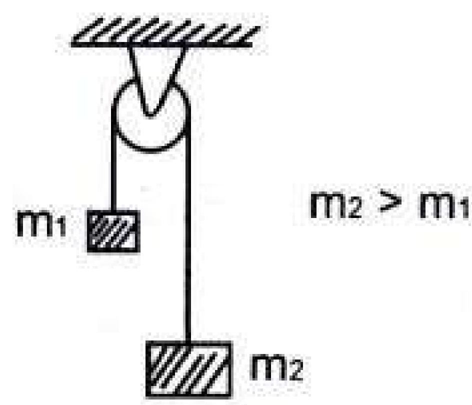
c) $\frac{3}{2}\frac{g}{L}$

d) N.R.A.



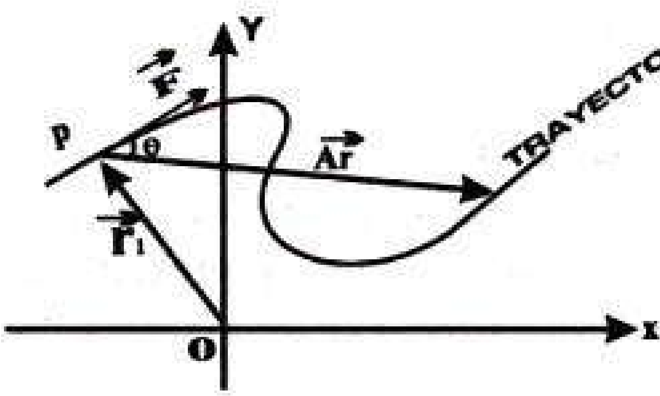
10. Dos masas m_1 y m_2 están atadas a los extremos de un hilo delgado, de masa despreciable, que pasa por una polea de radio R y momento de inercia Io.
Si se considera que no existe fricción en el apoyo de la polea y que el hilo no resbala sobre la polea, la tensión del hilo en el lado izquierdo en relación a la del lado derecho es:

a) Mayor
b) Menor
c) Igual
d) No se puede determinar



2. TRABAJO

Cuando sobre una partícula P que se encuentra en la posición $\vec{r}_1$ en el plano Oxy se aplica una fuerza constante $\vec{F}$ y la partícula realiza un desplazamiento $\vec{\Delta r}$, se efectúa trabajo.



El trabajo es la medida de la acción de una fuerza con respecto al recorrido de su punto de aplicación.

Definición: El trabajo (W) desarrollado por una fuerza constante es igual al producto escalar del vector fuerza ($\vec{F}$) por el vector desplazamiento ($\vec{\Delta r}$):

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r}$$

$$W = (Fx\vec{i} + Fy\vec{j}) \cdot (\Delta rx\vec{i} + \Delta ry\vec{j}) \qquad \textbf{(2.1.1)}$$

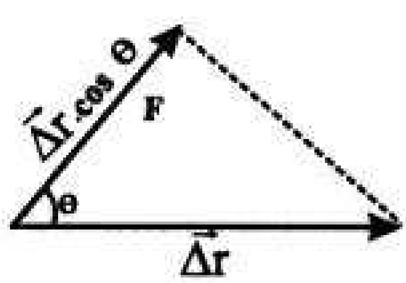
$$W = Fx \cdot \Delta rx + Fy \cdot \Delta ry \qquad \textbf{(2.1.2)}$$

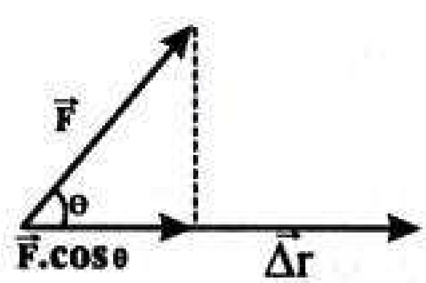
Esta ecuación nos indica que el trabajo realizado por una fuerza es igual a la suma algebraica de los trabajos hechos por sus componentes rectangulares.

Aplicando la definición de producto escalar, tenemos:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{\Delta r} \qquad \textbf{(2.1.3)}$$

$$\mathrm{W = F \cdot \Delta r \cdot \cos\theta}$$



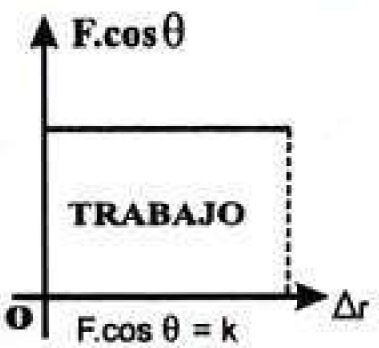


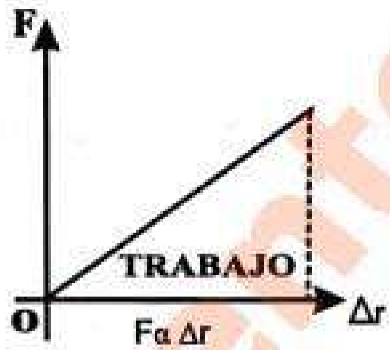
Esta ecuación puede interpretarse como el producto del módulo de la fuerza (F) por la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza ($\Delta r \cdot \cos\theta$) o como el producto del módulo del desplazamiento (Δr) por la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento ($F \cdot \cos\theta$):

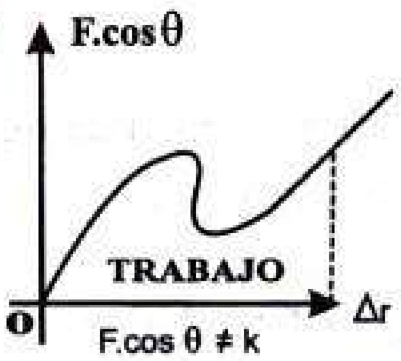
$$W = F(\Delta r \cdot \cos\theta) = \Delta r(F \cdot \cos\theta)$$

Interpretación gráfica del Trabajo:

El trabajo se puede representar gráficamente tomando los valores de la componente de la fuerza que realiza trabajo en el eje Y y los valores del desplazamiento realizado en el eje X. La medida de este trabajo realizado está representado por la superficie del área bajo el diagrama.

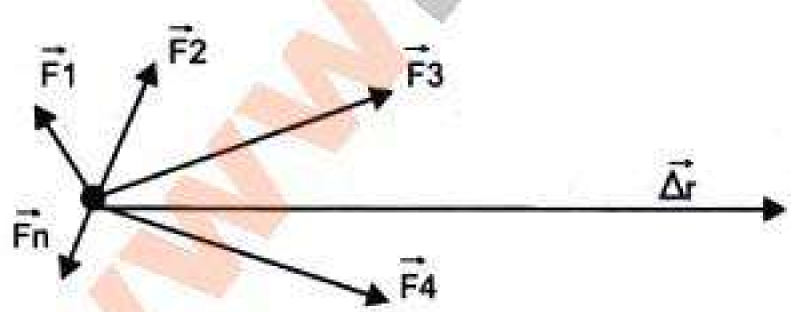






Clases de trabajo:

Trabajo Neto: cuando sobre un cuerpo actúan varias fuerzas: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4, ...$, se puede calcular el trabajo neto realizado de dos maneras:



1) Sumando algebraicamente los trabajos efectuados por las fuerzas componentes (Δr es el mismo para todas las fuerzas que actúan sobre la partícula):

$$W_N = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 + ...$$

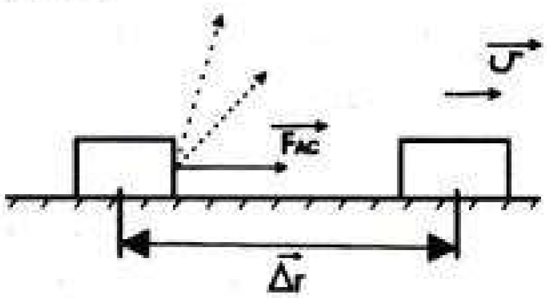
$$W_N = \vec{F}_1 \cdot \vec{\Delta r} + \vec{F}_2 \cdot \vec{\Delta r} + \vec{F}_3 \cdot \vec{\Delta r} + \vec{F}_4 \cdot \vec{\Delta r} + ... \qquad \textbf{(2.1.4)}$$

2) Determinando la resultante de dichas fuerzas y calculando el trabajo de la misma:

$W_N = [\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 + ...] . \vec{\Delta r}$

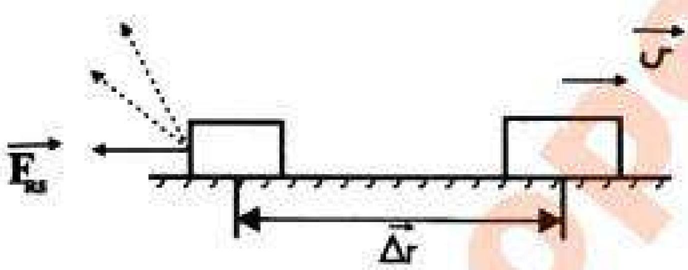
$W_N = \vec{F}_R . \vec{\Delta r}$ **(2.1.5)**

Trabajo Activo: es el realizado por la resultante de las fuerzas activas. Una fuerza es considerada activa cuando su dirección forma un ángulo agudo con la del desplazamiento (<90º), esto determina que aumente la rapidez de la partícula a la cual está aplicada.



$W_{AC} = \Sigma\vec{F}_{AC} . \vec{\Delta r}$

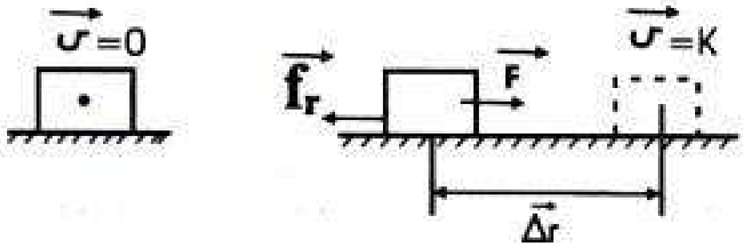
Trabajo Resistivo: el trabajo realizado por la resultante de las fuerzas resistivas, una fuerza es considerada resistiva cuando su dirección forma un ángulo obtuso con la del desplazamiento (>90º), esto determina que disminuya la rapidez de la partícula a la cual está aplicada.



$W_{RS} = \Sigma\vec{F}_{RS} . \vec{\Delta r}$

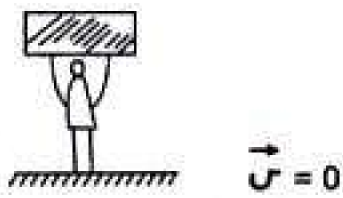
Trabajo Nulo: el trabajo es nulo cuando uno de los factores de la ecuación:
$W_N = F_R . \Delta r . \cos\theta$ es cero:

a) $\mathbf{F_R = 0}$, cuando la suma de todas las fuerzas aplicadas al cuerpo es cero, (equilibrio estático o dinámico) el trabajo neto es cero. Por ejemplo cuando un cuerpo está en reposo o en movimiento con velocidad constante (M.R.U).



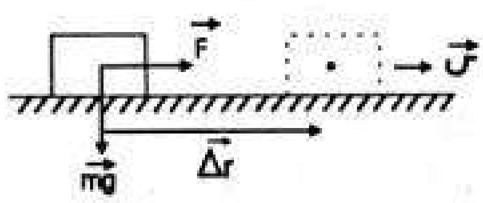
$W_N = F_R . \Delta r . \cos\theta$
$W_N = (0) . \Delta r . \cos\theta$
$W_N = 0$

b) $\Delta r = 0$ cuando se aplica una fuerza a un cuerpo y este no sufre desplazamiento, el trabajo de esta fuerza es nulo. Por ejemplo cuando una persona sostiene un obejto sin desplazarlo.



$W_N = F \,.\, \Delta r \,.\, \cos\theta$
$W_N = F(0)\cos\theta$
$W_N = 0$

c) **$\cos\theta = 0$**, si la fuerza es perpendicular al desplazamiento, el trabajo efectuado por la fuerza es nulo. Por ejemplo el trabajo efectuado por el peso de un cuerpo, cuando este se mueve en el plano horizontal.



$W_{mg} = mg.\, \Delta r \,.\, \cos 90^{o}$
$W_{mg} = mg.\, \Delta r \,.\, (0)$
$W_{mg} = 0$

De la ecuación (2.1.5) podemos concluir que el trabajo total es igual a la suma algebraica del trabajo activo con el trabajo resistivo:

$$W_R = \vec{F}_R \,.\, \vec{\Delta r}$$

$$W_R = [\Sigma\vec{F}_{AC} \times \Sigma\vec{F}_{RS}] . \vec{\Delta r} \qquad \textbf{(2.1.6)}$$

$$W_R = \Sigma\vec{F}_{AC} \times \vec{\Delta r} + \Sigma\vec{F}_{RS} \times \vec{\Delta r}$$
$$W_R = W_{AC} + W_{RS}$$

Si el trabajo activo es igual al trabajo resistivo, el trabajo total es nulo y no se produce variación en la velocidad de la partícula.

Unidades: el trabajo es una magnitud escalar, cuyas unidades son las de una fuerza multiplicada por las de un desplazamiento:

En el SI: $\vec{F}.\ \vec{\Delta r} = W$
[N][m] = [J] (julio)
1 julio es el trabajo que realiza una fuerza de 1 [N] al desplazarse su punto de aplicación 1 [m].

En el CGS: $\vec{F}.\ \vec{\Delta r} = W$

[DINA][cm] = [ergio]

1 ergio es el trabajo que realiza una fuerza de 1 [DINA] al desplazarse su punto de aplicación 1 [cm].

En el técnico: $\vec{F}.\ \vec{\Delta r} = W$

[kgf][m] = [kgm][kilográmetro]

1 kilográmetro es el trabajo que realiza una fuerza de 1 [kgf] al desplazarse su punto de aplicación 1 [m]

Equivalencias:

$1[J] = 1\,[N]\,.\,1[m]$

$1[J] = 10^5\,[dinas]\,.\,10^2[cm]$

$1[J] = 10^7\,[ergios]$

$1[kgm] = 1[kgf]\,.\,1\,[m]$

$1[kgm] = 9{,}8[N]\,.\,1\,[m]$

$1[kgm] = 9{,}8[J]$

Dimensiones:

$W = \vec{F}.\ \vec{\Delta r}$

$W = F\,.\,\Delta r\ .\cos\theta$

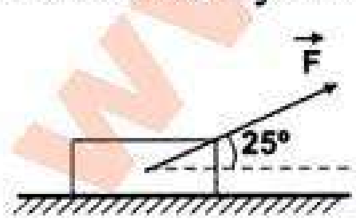
$W = m.a.\Delta r\,.\cos\theta$

$[W] = [\,M.LT^{-2}.L]$

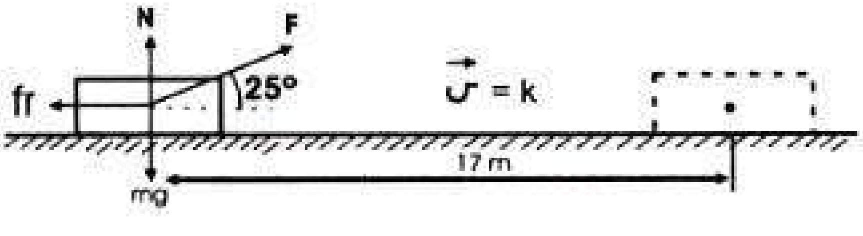
$[W] = [M.L^2.T^{-2}]$

Ejemplos:

1. Un bloque de 56 kg es arrastrado a velocidad constante por una fuerza $\vec{F}$ en un plano horizontal una distancia de 17 m, si μ = 0,25 determinar utilizando el método vectorial y el método escalar.



a) El trabajo realizado por $\vec{F}$
b) El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento
c) El trabajo realizado por la normal y el peso
d) El trabajo neto



$\Sigma Fy = 0$
$N = mg$
$N = 56(kg) . 9.8 (m/s^2)$
$N = 548,8 (N)$

$\Sigma Fx = 0$
$F \cos\theta = fr$
$F \cos\theta = \mu.N$

$$F = \frac{\mu.N}{\cos\theta} = \frac{0.25 \times 548.8(N)}{\text{Cos}25°}$$

$F = 151.38 (N)$
$F = [151.38(N) ; 25°]$
$\vec{F} = (137.2\,\vec{i} + 63.98\,\vec{j}) (N)$

a) $W_F = \vec{F} . \vec{\Delta r}$
$W_F = (137.2\,\vec{i} + 63.98\,\vec{j})(N).(17\,\vec{i})(m)$
$W_F = [(137.2)(17) + (63.98)(0)](J)$

$W_F = F . \Delta r . \cos\theta$
$W_F = 151.38(N).17(m). \cos25°$
$W_F = 2332.4 (J)$

b) $fr = F. \cos\theta$
$fr = 151.38 (N) \cos 25°$
$fr = 137.20(N$
$fr = [137(N);180°]$
$fr = (-137.2\,\vec{i})(N)$

$W_{fr} = fr .\Delta r$
$W_{fr} = (-137.2\,\vec{i})(N) . (17\,\vec{i})(m)$
$W_{fr} = [(-137.2)(17)(J)$

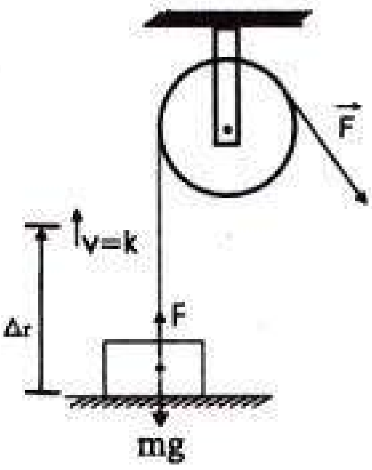
$W_{fr} = -2332.4(J)$

$W_{fr} = -\vec{fr}.\vec{\Delta r}$
$W_{fr} = -[137,2(N)][17](m)$
$W_{fr} = -2332.4 (J)$

c) $N = mg = 548.8 (N)$
$W_N = 0$
$W_{mg} = 0$

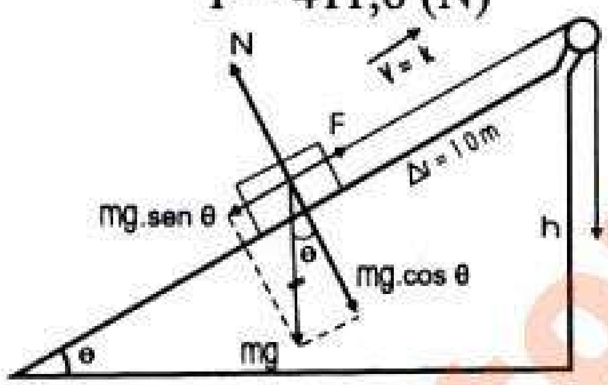
d) $W_T = W_F + W_N + W_{fr} + W_{mg}$
$W_T = 2332.4(J) + 0 - 2332.4(J) + 0$
$W_T = 0(J)$

2. Un hombre sube con velocidad constante un cuerpo de 42 kg. hasta una altura de 5,8 m. Determinar :
   a) Cuál es el trabajo realizado si utiliza una polea fija
   b) Cuál es el trabajo realizado si utiliza una rampa de 10 m (μ=0)



$\Sigma Fy = 0$
$F = mg$
$F = 42(kg).9,8\ (m/s2)$
$F = 411,6\ (N)$

$W= F.\Delta r$
$W= 411,6(N).5,8\ (m)$
$W= 2387,30\ (J)$

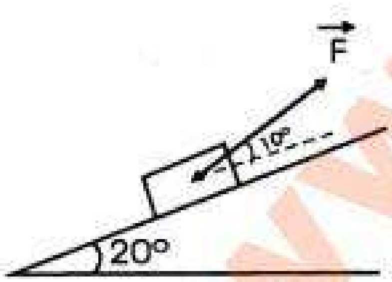


$$\text{sen}\ \theta = \frac{h}{\Delta r} = \frac{5,8\ m}{10\ m}$$

$\theta = 35,45°$
$W= F.\Delta r$
$W= 238,73(N).10(m)$
$W= 2387,30(J)$

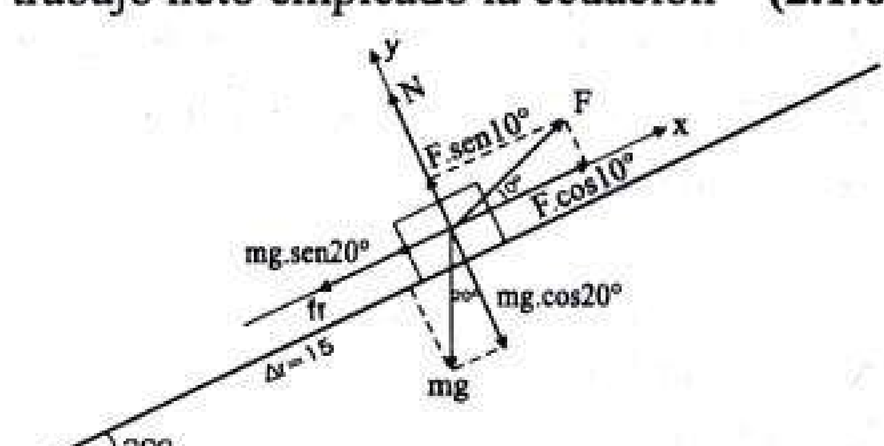
$\Sigma Fx = 0$
$F= mg\ .\ \text{sen}\ \theta$
$F= 42(kg)\ .\ 9,8\ (m/s^2)\ .\ \text{sen}\ 35,45°$
$F= 238,73\ (N)$

3. Un bloque de 16 kg es arrastrado una distancia de 15 m hacia arriba de un plano inclinado por una fuerza $\vec{F}$ con una aceleración de 2,5 m/s^2. Si μ=0,2 determinar escalar y vectorialmente:



a) El trabajo realizado por $\vec{F}$
b) El trabajo realizado por la normal
c) El trabajo realizado por el peso
d) El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento
e) el trabajo neto empleado la ecuación **(2.1.4)**
f) el trabajo neto empleado la ecuación **(2.1.5)**
g) el trabajo neto empleado la ecuación **(2.1.6)**

a) $\Sigma Fy = 0$
$N + F\ .\ \text{sen}\ 10° = mg\ .\ \cos 20°$
$N + F\ .\ \text{sen}\ 10° = 147,24\ (N)$



$N = 147{,}34\ (N) - F\ .\ \text{sen}\ 10^\circ$

$\Sigma Fx = ma$

$F\ .\ \cos 10^\circ - mg\ .\ \text{sen}20^\circ - fr = ma$

$F\ .\ \cos 10^\circ - \mu[147{,}34(N) - F\ .\ \text{sen}10^\circ] = 40(N) + 53.63\ (N)$

$F\ .\ \cos 10^\circ + \mu.F.\text{sen}10^\circ = 40(N) + 53{,}63\ (N) + 29{,}47\ (N)$

$F(\cos 10^\circ + \mu.\text{sen}10^\circ) = 123.10\ (N)$

$F = 120{,}74\ (N)$

$F = [120{,}74(N)\ ;\ 10^\circ]$

$\vec{F} = (118{,}91\ \vec{i} + 20{,}97\ \vec{j})(N)$

$W_F = F.\ \Delta r\ .\ \cos\theta$

$W_F = 120{,}74\ (N)\ .\ 15(m)\ .\ \cos 10^\circ$

$W_F = 1783{,}6\ (J)$

$W_F = \vec{F}.\ \vec{\Delta r}$

$W_F = (118{,}91\ \vec{i} + 20{,}97\ \vec{j})(N)\ .\ (15\ \vec{i}\ )\ (m)$

$W_F = 1783{,}6(J)$

b) $W_N = 0$ porque N es perpendicular al Δr

c) $W_{mg} = mg\ .\ \Delta r\ .\ \cos\theta$

$W_{mg} = 16(kg)\ .\ 9{,}8\ (m/s2).15(m).\ \cos 250^\circ$

$W_{mg} = -804{,}43\ (J)$

$mg = 16(kg).9{,}8\ (m/s^2)$

$mg = 156{,}8\ (N)$

$W_{mg} = m\vec{g}\ .\ \vec{\Delta r}$

$W_{mg} = [156{,}8(N)\ ;\ 250^\circ]\ .\ (15\ \vec{i})(m)$

$W_{mg} = (-53{,}63\ \vec{i} - 147{,}34\ \vec{i})\ (N)\ .\ (15\ \vec{i})\ (m)$

$W_{mg} = [(-53{,}63)(15) + (-147{,}34)(0)](J)$

$W_{mg} = -804{,}43\ (J)$

d) $N = 147{,}34\ (N) - F\ .\ \text{sen}\ 10^\circ$

$N = 147{,}34(N) - 20{,}97\ (N)$

$N = 126{,}37\ (N)$

$fr = \mu.N$

$fr = 0{,}2[126{,}37(N)]$

$fr = 25{,}27\ (N)$

$\vec{N} = (126{,}37\,\vec{j})\,(N)$

$\vec{fr} = (-25{,}27\,\vec{i})(N)$

$W_{fr} = -\vec{fr}\,.\,\vec{\Delta r}$
$W_{fr} = -[25{,}27(N)].[(15)(m)]$
$W_{fr} = -379{,}06(J)$

$W_{fr} = \vec{fr}\,.\,\vec{\Delta r}$
$W_{fr} = [-25{,}27\,\vec{i}\,(N)].[15\,\vec{i}\,(m)]$
$W_{fr} = -379{,}05(J)$

e) $W_T = W_F + W_N + W_{mg} + W_{fr}$
$W_T = 1783{,}6(J) + 0 - 804{,}43(J) - 379{,}05(J)$
$W_T = 600{,}12\,(J)$

f) $\vec{F}_R = \vec{F} + \vec{N} + \vec{fr} + \vec{mg}$
$\vec{F}_R = (18{,}91\vec{i} + 20{,}97\,\vec{j})(N) + (126{,}37\,\vec{j})(N) + (-25{,}27\,\vec{i})(N) + (-53{,}63\,\vec{i} - 147{,}34\vec{j})\,(N)$
$\vec{F}_R = 40{,}01\,\vec{i}\,(N)$

$W_T = \vec{F}_R.\,\vec{\Delta r}$
$W_T = (40{,}01\,\vec{i})(N)\,.\,(15\vec{i})(m)$
$W_T = (40{,}01)(15)(J)$
$W_T = 600{,}11\,(J)$

g) $W_{AC} = \Sigma F_{AC}\,.\,\Delta r$
$W_{AC} = (F\cos 10^o)\,.\Delta r$
$W_{AC} = 120{,}74(N)\,.\,\cos 10^o\,.\,15(m)$
$W_{AC} = 1783{,}59\,(J)$

$W_{RS} = -\,\Sigma F_{RS}\,.\,\Delta r$
$W_{RS} = -(fr + mg.sen20^o).\Delta r$
$W_{RS} = -[25{,}27(N) + 53{,}63(N)].15m$
$W_{RS} = -1183{,}48\,(J)$

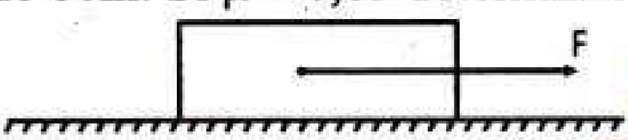
$W_T = W_{AC} + W_{RS}$
$W_T = 1783{,}59\,(J) - 1183{,}48\,(J)$
$W_T = 600{,}11\,(J)$

2.2 EJERCICIO No. 2

1. Determinar el trabajo efectuado por la fuerza $\vec{F} = (14\,\vec{i} - 17\,\vec{j})$(N) aplicada sobre una partícula si esta se mueve desde el punto A(-7,-3) m hasta el punto B = (8,1)m.

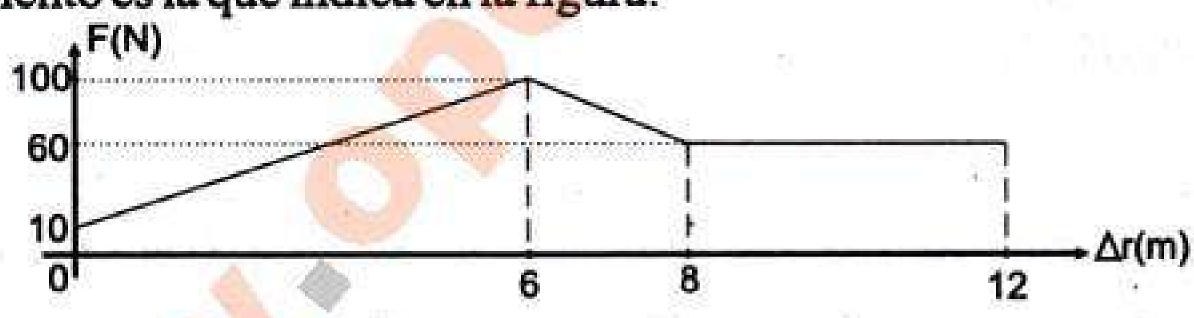
2. Calcular la fuerza colineal al $\vec{\Delta r} = (-4{,}2\,\vec{i} + 6{,}7\,\vec{j})$ m necesaria para efectuar un trabajo de -30(J)

3. La fuerza F de la figura mueve con velocidad constante un cuerpo de 3000 kg una distancia de 60m. Si $\mu = 0{,}05$ determinar:



   a) El trabajo realizado por la fuerza F
   b) El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento
   c) El trabajo neto

4. Calcular el trabajo realizado por una fuerza cuya variación en función del desplazamiento es la que indica en la figura.

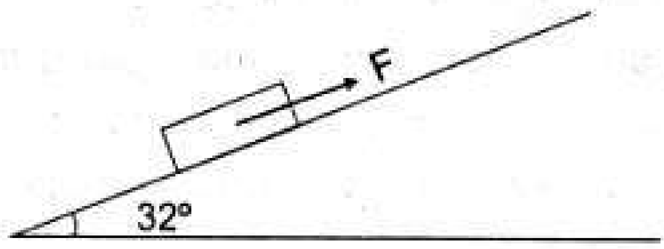


5. Un obrero para hacer un pozo tiene que sacar 170 cubos de tierra. Si cada cubo pesa 250 (N) y la profundidad media del pozo es 12 m. Calcular el trabajo efectuado en contra de la gravedad.

6. Un obrero arrastra un saco de 50 kg haciendo una fuerza horizontal de 230(N) en un espacio de 8m. Después lo carga a un camión que está a 1,2m del suelo. Calcular el trabajo total realizado por el obrero.

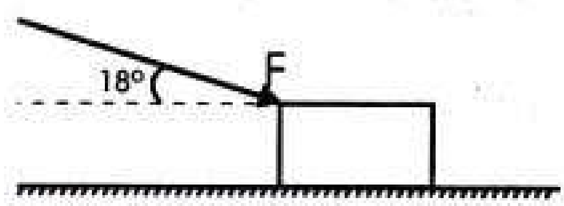
7. En un ascensor de 250kg viajan cuatro personas de 20 kg, 30 kg, 40 kg y 50kg cada una, la primera llega hasta el 3er. piso. la segunda y la cuarta hasta el 4to. piso y la tercera hasta el 2do. piso. Si entre cada piso hay una altura de 3m. calcular el trabajo total efectuado por el motor del ascensor en contra de la gravedad.

8. Una fuerza F desplaza un bloque de 40 kg plano arriba una distancia de 14m. Si la velocidad es constante, determinar el trabajo realizado por F cuando:
   a) $\mu = 0$
   b) $\mu = 0,08$



9. Un hombre aplicando una fuerza constante de 350 (N) desplaza con velocidad constante una caja de 100 kg hasta subirla a un camión que tiene 1,6m de altura. Determinar:
   a) La longitud de la plancha que utilizó
   b) El trabajo realizado para colocar la caja sobre el camión
   c) El trabajo realizado por la fuerza normal
   d) El trabajo realizado por el peso
   e) El trabajo neto

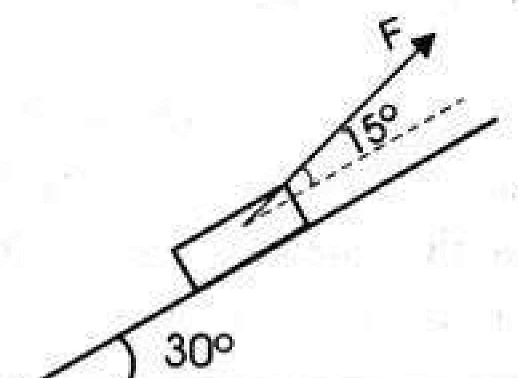
10. Una fuerza de 130 (N) es aplicada sobre un bloque de 25 kg como indica la figura. Si el bloque se mueve 6m a la derecha y $\mu = 0,3$ determinar:



   a) El trabajo realizado por F
   b) El trabajo realizado por la normal
   c) El trabajo realizado por el peso
   d) El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento
   e) El trabajo neto

11. Un cuerpo de 10 kg es arrastrado 20m hacia arriba de un plano inclinado por una fuerza de 160(N), como indica la figura. Si $\mu = 0,2$ determinar:

   a) El trabajo realizado por F
   b) El trabajo realizado por la normal
   c) El trabajo realizado por el peso
   d) El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento
   e) El trabajo neto



2.3 POTENCIA

Desde el punto de vista tecnológico en la selección de un motor o una máquina, la potencia es uno de los criterios más importantes, pues la rapidez con que puede efectuar el trabajo, interesa más que la cantidad total de trabajo que puede realizar la máquina. Esta rapidez para realizar trabajo se llama potencia.

Definición: La potencia de un mecanismo es igual al cociente entre el trabajo desarrollado y el intervalo de tiempo en el que fue efectuado:

$$P = \frac{W}{\Delta t} \qquad \textbf{(2.3.1)}$$

De esta ecuación deducimos que la potencia es directamente proporcional al trabajo realizado e inversamente proporcional al tiempo en que se efectuó ese trabajo. De dos cuerpos que hagan un mismo trabajo, se considerará más potente el que lo realice en menor tiempo.

Potencia media: si la fuerza aplicada es constante, la potencia media también es constante y es el trabajo realizado por unidad de tiempo:

$$P_m = \frac{W}{\Delta t} \qquad \textbf{(2.3.2)}$$

Reemplazando el W por $\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$, tenemos:

$$P_m = \frac{\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$P_m = \vec{F}\,\vec{V}_m \qquad \textbf{(2.3.3)}$$

$$P_m = F \cdot V_m \cdot \cos\theta \qquad \textbf{(2.3.4)}$$

La potencia media aplicada a un cuerpo es el producto escalar de la $\vec{F}$ por su $\vec{V}_m$. Cuando $\vec{F}$ y $\vec{V}_m$ son paralelos, la potencia media es igual al producto de sus módulos, siendo positivo si van en el mismo sentido ($\vec{\mu}_F = \vec{\mu}_{vm}$) o negativo en caso contrario ($\vec{\mu}_F = -\vec{\mu}_{vm}$).

De la ecuación $P_m = \vec{F} \cdot \vec{V_m}$ podemos sacar dos conclusiones:

1. Si la fuerza es constante en módulo y dirección, la velocidad del cuerpo es directamente proporcional a la potencia del motor. Ej.: para que un vehículo tenga gran velocidad, necesita un motor de gran potencia.
2. Si la potencia del mecanismo es constante, la fuerza aplicada al cuerpo por el mecanismo es inversamente proporcional a la velocidad. Ej.: en los vehículos se ejerce la máxima fuerza en la marcha "primera", donde la velocidad es mínima.

Potencia Instantánea: cuando el intervalo de tiempo tiende a cero, se puede calcular la velocidad instantánea [$\vec{V_i}$] y la potencia media se transforma en potencia instantánea, que es la rapidez con que se realiza trabajo en cualquier instante:

$P_m = \vec{F} \cdot \vec{V_m}$

$P_i = \vec{F} \cdot \vec{V_i}$ **(2.3.5)**

$P_i = F.V_i.\cos\theta$ **(2.3.6)**

Unidades: la potencia es una magnitud escalar, cuyas unidades son las del trabajo divididas por las del tiempo:

En el SI:

$$\frac{W}{\Delta t} = P$$

$$\frac{[J]}{[s]} = [w](\text{vatio})$$

1 vatio es la potencia de una máquina que realiza un trabajo de 1[J] en cada segundo

En el CGS:

$$\frac{W}{\Delta t} = P$$

$$\frac{[ergio]}{[s]} = \left[\frac{ergio}{s}\right]$$

1 ergio/s es la potencia de una máquina que realiza un trabajo de 1 [ergio] en cada segundo.

En el Técnico:

$$\frac{W}{\Delta t} = P$$

$$\frac{[kgm]}{[s]} = \frac{[kmg]}{[s]}$$

1 kgm/s es la potencia de una máquina que realiza un trabajo de 1[kgm] en cada segundo

Históricamente se crearon otras unidades de potencia:
Caballo de vapor (C.V) = 75 kgm/s = 736 w
Caballo de fuerza (H.P) = 76 kgm/s = 746 w

Equivalencias:

$$1[w] = \frac{1[J]}{s} \qquad 1[w] = \frac{1[J]}{s} \qquad 1Kw = 1000w$$

$$1[w] = \frac{10^7[ergios]}{s} \qquad 1[w] = \frac{[Kgm]}{9{,}8\ s} \qquad 1Mw = 1000000w$$

$$1[w] = 10^7[ergios/s] \qquad 1[w] = 0{,}102\ [kgm/s]$$

Dimensiones:

$$P = \frac{W}{\Delta t}$$

$$[P] = \left[\frac{ML^2T^{-2}}{T}\right]$$

$$[P] = [ML^2T^{-3}]$$

Ejemplos:

1. Calcular la potencia de un motor, que para adquirir una velocidad de $(-32{,}4\,\vec{i} + 43{,}2\,\vec{j})$ [km/h] ejerce una fuerza de tracción en las ruedas de $(-2664\,\vec{i} + 3552\,\vec{j})$ [N].

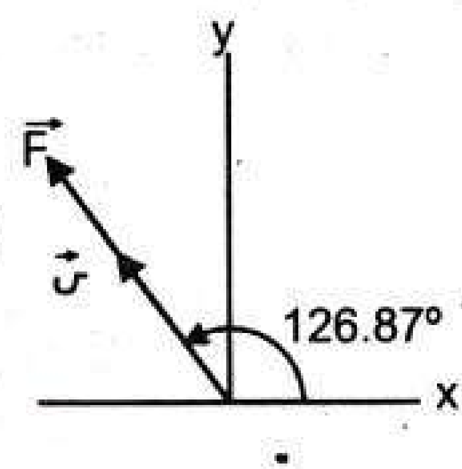
   a) Método vectorial:

   $\vec{V} = (-32{,}4\,\vec{i} + 43{,}2\,\vec{j})\ [km/h] = (-9\,\vec{i} + 12\,\vec{j})\ [m/s]$
   $\vec{F} = (-2664\,\vec{i} + 3552\,\vec{j})\ [N]$
   $P = \vec{F}\ .\ \vec{V}$

   $P = Fx\ Vx + Fy\ Vy$
   $P = [(-9)(-2664) + (12)(3552)][w]$
   $P = (23976 + 42624)\ [w]$
   $P = 66\,600\ [w]$
   $P = 89{,}28$ H.P.

   b) Método escalar

   $\vec{V} = (-9\,\vec{i} + 12\,\vec{j})[m/s] = (15[m/s];\ 126{,}87°)$
   $\vec{F} = (-2664\,\vec{i} + 3552\,\vec{j})[N] = (4440[N]; 126{,}87°)$
   $P = F.V.\cos\theta$
   $P = (4440\ [N])\ (15[m/s])\ .\ \cos 0°$
   $P = 66\,600\ [w]$
   $P = 89{,}28$ H.P.



2. En los terrenos de una hacienda existe una caída de agua de 7 m de altura y se sabe que cada minuto cae un volumen de agua de 4 m^3. Determinar:

   a) La potencia desarrollada por la caída de agua
   b) Si será suficiente la potencia anterior para mantener encendidos 45 focos de 100[w] que existen en la hacienda.

   a) $m = 4[m^3] = 4000[kg]$; $1m^3$ de agua = 1000kg

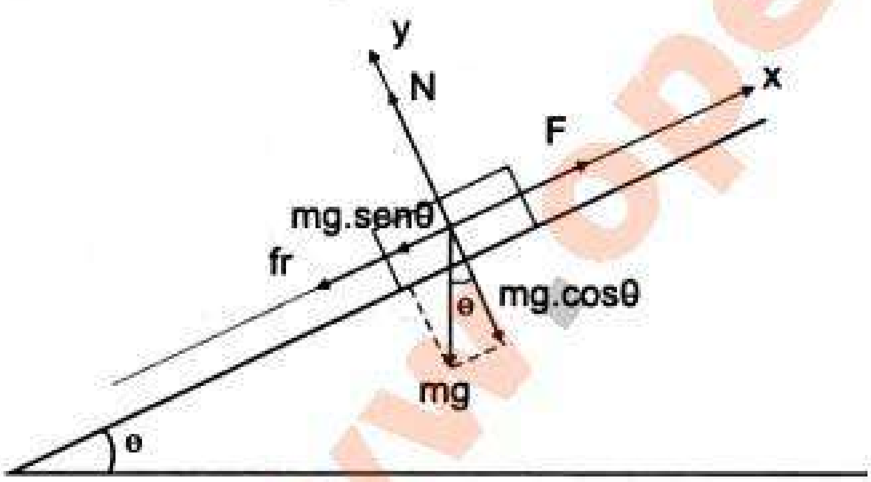
$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{mgh}{\Delta t}$$

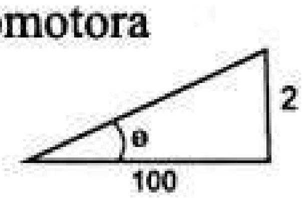
$$P = \frac{4000(kg) \cdot 9{,}8\ (m/s^2) \cdot 7m}{60\ s}$$

$$P = 4573{,}33\ w$$

b) Si es suficiente, porque 4573,33 w que es la potencia desarrollada es mayor que los 4500 w que es lo que se necesita.

3. Un tren de 800 toneladas es acelerado hacia arriba de una pendiente de 2%, la velocidad aumenta de 18 km/h a 36 km/h en una distancia de 500m. Si $\mu = 0{,}02$ determinar:
   a) La potencia neta
   b) La potencia desarrollada por la fuerza de rozamiento
   c) La potencia desarrollada por el peso
   d) La fuerza desarrollada por la locomotora
   e) La potencia desarrollada por la locomotora
   f) La máxima potencia desarrollada por la locomotora





$m = tg\,\theta = 2/100$

$\theta = 1{,}146^\circ$

$V_o = 18\ km/h = 5\ m/s$

$V_F = 36\ km/h = 10\ m/s$

$V_m = 7{,}5\ m/s$

a) $V_F^2 = V_o^2 + 2a.\Delta r$

$$a = \frac{V_F^2 - V_o^2}{2\ \Delta r}$$

$$a = \frac{(10\ m/s)^2 - (5\ m/s)^2}{1000\ m}$$

$F_R = m.a$

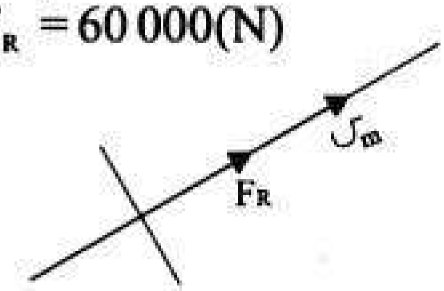
$F_R = 800\,000\ kg \cdot 0{,}075\ m/s^2$

$F_R = 60\,000(N)$

$P_n = F_R \cdot V_m$

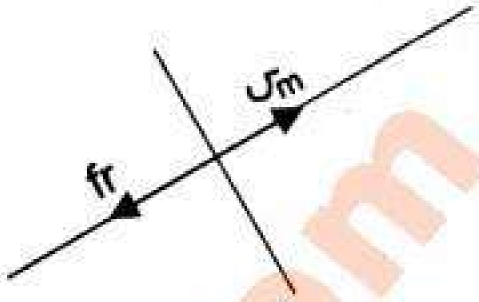
$P_n = 60\,000(N) \cdot 7{,}5\ m/s$

$P_n = 450\,000\ w$



b) $\Sigma Fy = 0$
$N = mg \cdot \cos\theta$
$N = 800\,000 kg \cdot 9{,}8\ m/s^2 \cdot \cos 1{,}146°$
$N = 7\,838\,431{,}82\ (N)$

$fr = \mu \cdot N$
$fr = 0{,}02 \cdot 7\,838\,431{,}82 (N)$
$fr = 156\,768{,}64\ (N)$

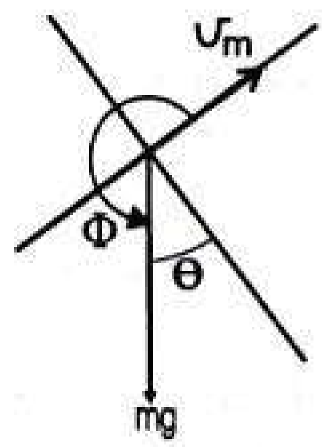


$P_{fr} = -fr \cdot V_m$
$P_{fr} = -156\,768{,}64(N)\ 7{,}5\ m/s$
$P_{fr} = -1\,175\,764{,}77\ w$

c) $mg = 800\,000\ kg \cdot 9{,}8\ m/s^2$
$mg = 7\,840\,000\ (N)$

$\Phi = 270° - 1{,}146°$
$\Phi = 268{,}854°$

$P_{mg} = mg \cdot Vm \cdot \cos \Phi$
$P_{mg} = 7\,840\,000(N) \cdot 7{,}56\ m/s \cdot \cos 268{,}854°$
$P_{mg} = -1\,176\,008{,}21\ w$



d) $\Sigma Fx = ma$
$F - mg \cdot sen\theta - fr = ma$
$F = ma + mg \cdot sen\theta + fr\ (1)$
$mg \cdot sen\theta = 800\,000\ kg \cdot 9{,}8\ m/s^2 \cdot sen\ 1{,}146°$
$mg \cdot sen\theta = 156\,801{,}1\ (N)$, reemplazando en (1)

$F = 60\,000\ (N) + 156\,801{,}1\ (N) + 156\,768{,}64(N)$
$F = 373\,569{,}74\ (N)$

e) $P_F = F \cdot V_m$

$P_F = 373\,569{,}74(N) \cdot 7{,}5\ m/s$
$P_F = 2\,801\,773{,}05(w)$

$P_n = P_F - P_{mg} - P_{fr}$

$P_F = P_n + P_{mg} + P_{fr}$
$P_F = 2\,801\,772{,}98\ (w)$

f) $P_{max} = F \cdot V_{max}$
$P_{max} = 373\,569{,}7(N) \cdot 10\ m/s$
$P_{max} = 3\,735\,697{,}4\ (w)$

2.4 EJERCICIO No. 3

1. Cuando sobre un cuerpo se aplica una fuerza de $(215\vec{i} - 118\vec{j})$ (N) durante 6s, se produce un desplazamiento de $(-9\vec{i} + 12\vec{j})$m. Determinar la potencia desarrollada por la fuerza:
   a) Método vectorial
   b) Método escalar

2. Un automóvil de 1200 kg recorre 160m por una vía horizontal mientras es acelerado uniformemente desde 45 km/h hasta 80 km/h. La resistencia al rodamiento es igual al 2% del peso del automóvil. Determinar:
   a) La máxima potencia requerida
   b) La potencia requerida para mantener una velocidad constante de 80 km/h.

3. La transmisión de un camión de 18 toneladas comunica a la máquina una potencia constante de 150 HP. Determinar el tiempo empleado y la distancia recorrida cuando la velocidad del camión aumenta de:
   a) 28 km/h a 54 km/h
   b) 54 km/h a 72 km/h

4. Una locomotora arrastra un tren de 600 toneladas con una velocidad constante de 90 km/h por una vía horizontal, siendo el valor de la fuerza resistente igual al 3% del peso del tren. Determinar:
   a) La fuerza de tracción
   b) La potencia desarrollada por la locomotora en HP
   c) La potencia neta.

5. En cuánto tiempo un motor 5 HP puede llenar con agua un depósito de 10 m^3 situado a 8m de altura.

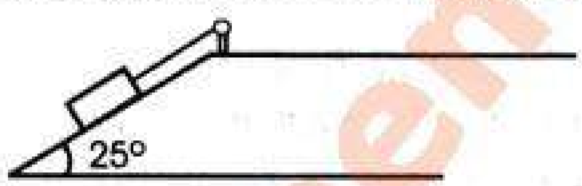
6. Calcular en megavatios la potencia total de tres cascadas dispuestas una tras otra en un río. Las alturas de caída del agua son: 8 m en la primera cascada, 6,5m en la segunda y 4,8 m en la tercera. El caudal medio del agua en el río es 37,4 m^3/s.

7. Un hombre de 65 kg lleva un cuerpo de 20 kg desde una altura de 6,5 m hasta otra de 12 m. El hombre utiliza 5 minutos para recorrer la distancia entre los dos sitios que es de 14,4 m. Encontrar la potencia media desarrollada por el hombre.

8. Un automóvil de 1100 kg sube sobre una rampa del 10% con una velocidad constante de 27,9 km/h. Si $\mu = 0,2$ determinar:
   a) La fuerza de tracción
   b) La potencia desarrollada por el coche
   c) La potencia desarrollada por el peso

9. Un tren de 210 toneladas sube por una rampa del 3%. Si $\mu = 0,05$ calcular:
   a) La potencia que debe tener la locomotora en HP para que partiendo del reposo alcance la velocidad de 57,6 km/h en 1,5 minutos
   b) La potencia que es necesaria para mantener la velocidad de 57,6 km/h en el plano horizontal y en la rampa del 3%
   La fuerza de frenado que detiene al tren en 5 s si se mueve a la velocidad de 57,6 km/h en el plano horizontal y en la rampa del 3% (bajando)

10. Un torno sube con una velocidad constante un bloque de 100 kg por un plano inclinado 25°. Si el bloque recorre 13 m en 1,2 minutos y $\mu = 0,3$ determinar:



   a) La potencia desarrollada por el peso
   b) La potencia desarrollada por la fuerza de rozamiento
   c) La potencia desarrollada por el torno
   d) La potencia neta

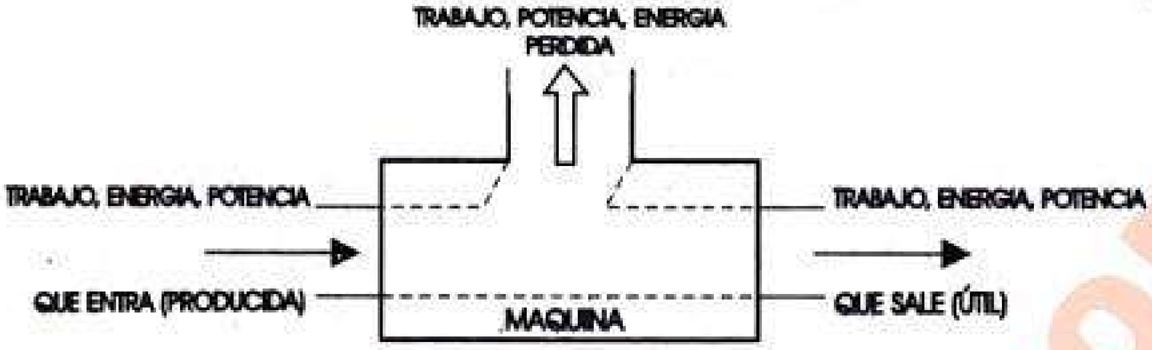
11. Un camión cargado y con una masa total de 20 toneladas, arranca en una carretera con una pendiente del 1%. La fuerza de resistencia equivale al 3% del peso total y la fuerza de tracción equivale al 7% del mismo, hallar:
   a) El tiempo empleado en adquirir una velocidad de 72 km/h
   b) La potencia desarrollada por el peso
   c) La potencia neta
   d) La máxima potencia desarrollada por el camión

2.5 RENDIMIENTO (EFICACIA MECANICA)

La idea de rendimiento va unida a la de trabajo. Cuando una máquina se usa para transformar energía mecánica en energía eléctrica o energía térmica en energía mecánica, su rendimiento puede definirse como la razón entre el trabajo que sale

(trabajo útil) y el que entra (trabajo producido), o como la razón entre la potencia que sale y la que entró, como la razón entre la energía que sale y la que entra.

$$\eta = \frac{trabajo\ \ útil}{trabajo\ producido} = \frac{potencia\ \ de\ \ salida}{potencia\ de\ entrada} \qquad \textbf{(2.5.1)}$$



Trabajo producido = Trabajo perdido + Trabajo útil **(2.5.2)**

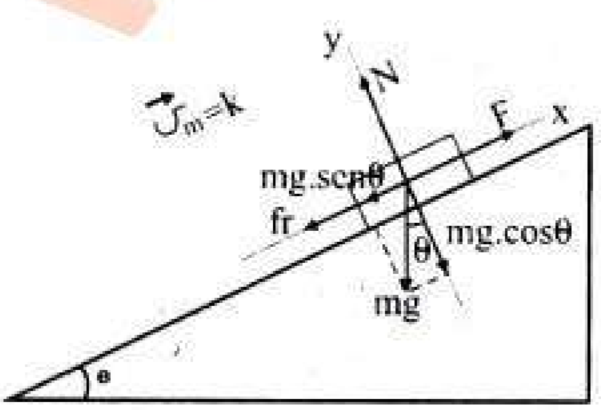
Potencia de entrada = Potencia perdida + Potencia de salida **(2.5.3)**

El rendimiento mecánico en una "máquina ideal" es 1 (μ=0), porque no existe rozamiento y el trabajo útil es igual al trabajo producido (potencia de salida es igual a la potencia de entrada).

El rendimiento mecánico de una "máquina real" (μ > 0) es siempre menor que 1, debido a las pérdidas de energía por el rozamiento interno que surge durante el funcionamiento de la máquina. Generalmente se multiplica por 100, para que el rendimiento se exprese en porcentaje. El rendimiento total de un número de máquinas colocadas en serie es igual al producto de sus rendimientos individuales.

Ejemplos:

1.- Un automóvil de 1500 kg recorre con velocidad constante 100 km de una carretera en rampa ascendente de 0.3% de desnivel en 2,5 horas. Si μ = 0.05 y el rendimiento del motor del automóvil es del 75%, determinar:
a) el trabajo útil
b) el trabajo producido
c) la potencia producida por el motor del automóvil en H.P.



$$\text{tg}\ \theta = \frac{0,3}{100}$$

$$\theta = 0,172°$$

a) $\Sigma Fx = 0$

$F = mg.sen\theta + \mu mg . cos\theta$

$F = 44{,}1\ (N) + 734{,}99(N)$

$F = 779\ (N)$

$W_{útil} = F . d$

$W_{útil} = 779(N).100\ 000m$

$W_{útil} = 77\ 900\ 000(J)$

b)

$$\eta = \frac{W_{útil}}{W_{producido}} \Longrightarrow W_{producido} = \frac{W_{útil}}{\eta} = \frac{77900\ 000(J)}{0{,}75} = 103866\ 666{,}7(J)$$

$$c)\ P = \frac{W_{producido}}{\Delta t} = \frac{103866666{,}7(J)}{2{,}5(3600s)} = 11540{,}7\ (w) = 15{,}7\ H.P.$$

2.- En una central hidroeléctrica de 55m de altura caen 120 toneladas de agua cada segundo. La potencia eléctrica que proporciona la central es de 50000 kw. Determinar:
a) El trabajo producido
b) El rendimiento de la central

a) $W_{producido} = mgh$

$W_{producido} = 120000kg.9{,}8/s^2 . 55m$

$W_{producido} = 64\ 680\ 000\ (J)$

b) $$P_{producido} = \frac{W_{producido}}{\Delta t} = \frac{64\ 680\ 000}{1s} = 64\ 680\ 000w$$

$$\eta = \frac{P_{útil}}{P_{producido}} = \frac{50000000w}{64680000w} = 0{,}773$$

$\eta = 77{,}3\%$

2.6 EJERCICIO No. 4

1.- Con una polea fija se levanta un cuerpo de 75 kg hasta una altura de 10m, si para ello se entregó un trabajo de 8800 (J). Determinar:
a) El trabajo útil
b) El trabajo perdido
c) El rendimiento

2.- Para subir el agua de un pozo hasta un tanque que esta a 15m de altura, se utiliza un motor de 6kw. Si en 2 minutos saca $3m^3$, determinar.
a) La potencia útil
b) La potencia perdida
c) El rendimiento del motor

3.- Calcular la potencia de los turbogeneradores en la estación de una red eléctrica de trenes. El número de vagones en la línea es 15, cada vagón es de 6 toneladas, la fuerza de resistencia por el rozamiento es el 0.05 del peso del vagón, la velocidad media es de 14,4 km/h y las perdidas en la red son del 6%.

4.- Para levantar 4000 m^3 de agua a 6 m de altura se utiliza una bomba con un motor de 4 H.P. Cuánto tiempo requiere este trabajo, si el rendimiento de la bomba es del 70%.

5.- Un montacargas eleva una carga de 800 toneladas hasta una altura de 30m en 55 s. El motor que proporciona la energía tiene un rendimiento del 25%.
Determinar:
a) La potencia desarrollada por el motor
b) El trabajo perdido

6.- Se comunica a un montacargas un trabajo de 8000(J). Si el rendimiento de la máquina es del 85%, hasta que altura podrá levantar un cuerpo del 120 kg:
a) Con velocidad constante
b) Con una aceleración de $1 m/s^2$

2.7 MAQUINAS SIMPLES

Las máquinas son mecanismos que se usan para transmitir fuerzas, cuyas direcciones y magnitudes pueden cambiar, pero nunca aumentan el trabajo producido.

En nuestro estudio consideraremos que las máquinas son ideales (peso despreciable y sin rozamiento).

Las máquinas simples son: palancas, poleas, planos inclinados, tornos y cuñas.

Las máquinas simples se usan para vencer ciertas fuerzas resistentes, llamadas resistencias (R) mediante otras fuerzas llamadas potencias (P)

La ventaja mecánica (V.M.) de una máquina es igual a la razón entre la fuerza resistente (R) ejercida por la máquina y la fuerza aplicada (P) a la máquina:

$$V.M. = \frac{Fuerza\ resistente}{Fuerza\ aplicada} = \frac{R}{P} \qquad \textbf{(2.7.1)}$$

Si $P < R \Rightarrow V.M. > 1$ y la máquina es ventajosa
Si $P = R \Rightarrow V.M. = 1$ y la máquina es indiferente
Si $P > R \Rightarrow V.M. < 1$ y la máquina es desventajosa

Toda máquina es útil aunque sea desventajosa, porque sirve para otros fines como modificar la dirección de la fuerza en un modo mas favorable, o para ganar velocidad o para multiplicar fuerzas etc.

Palanca: es una barra que puede girar alrededor de un punto fijo llamado apoyo. Las distancias entre el punto de apoyo y los puntos de aplicación de la potencia y resistencia se llaman brazo de potencia y brazo de resistencia.

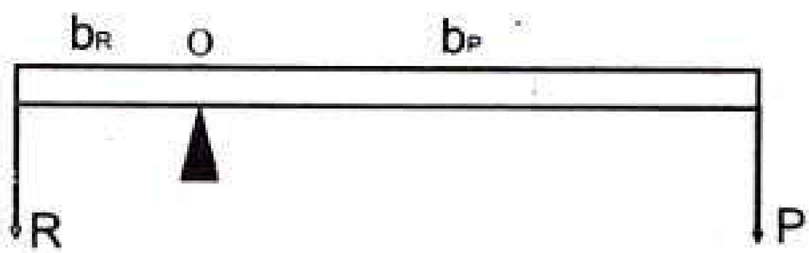
Cuando una palanca está en equilibrio (no gira en torno al punto de apoyo) la suma de los momentos de todas las fuerzas con relación a un punto cualquiera es cero:

$$\Sigma M_o = 0$$
$$P.\, b_p = R b_R \qquad \textbf{(2.7.2)}$$

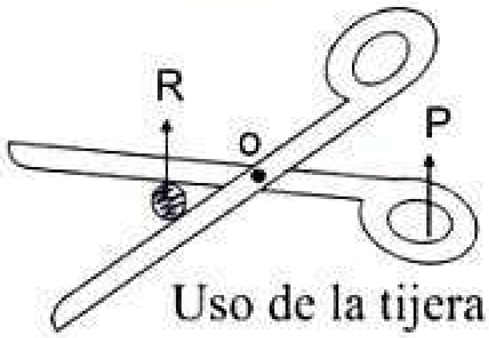
De esta ecuación concluimos que una palanca es ventajosa cuando el $b_p > b_R$ y es desventajosa cuando el $b_p < b_R$.

Se distinguen tres tipos de palancas según la posición del punto de apoyo respecto a la fuerza resistente (R) y a la fuerza aplicada (P):

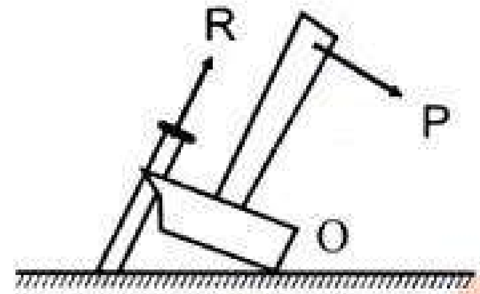
Primer género: el punto de apoyo está entre la potencia y la resistencia. Si está en el medio la palanca es diferente, mientras que es ventajosa si el punto de apoyo esta desviado hacia el lado de la R:



Aplicaciones de la palanca de primer género:

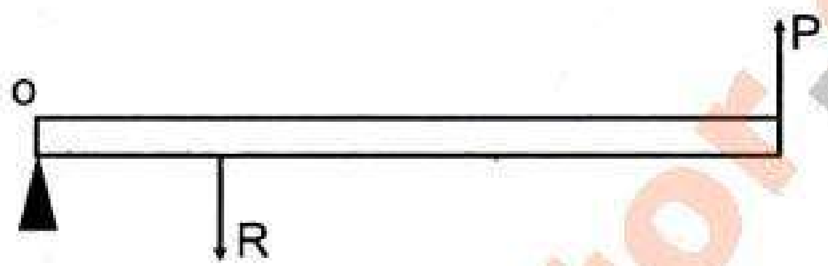


Uso de la tijera

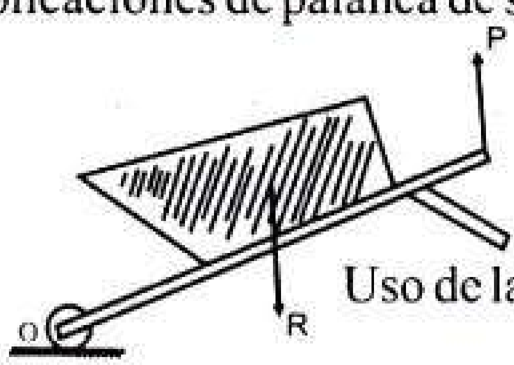


Uso del martillo para sacar clavos

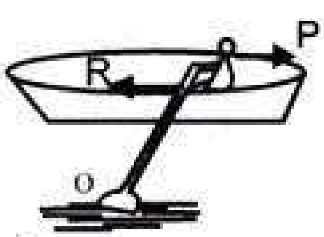
Segundo género: el punto de apoyo está en el extremo y la fuerza R está entre el apoyo y la fuerza P. Este tipo de palanca es siempre ventajosa, porque el $b_P > b_R$:



Aplicaciones de palanca de segundo género:

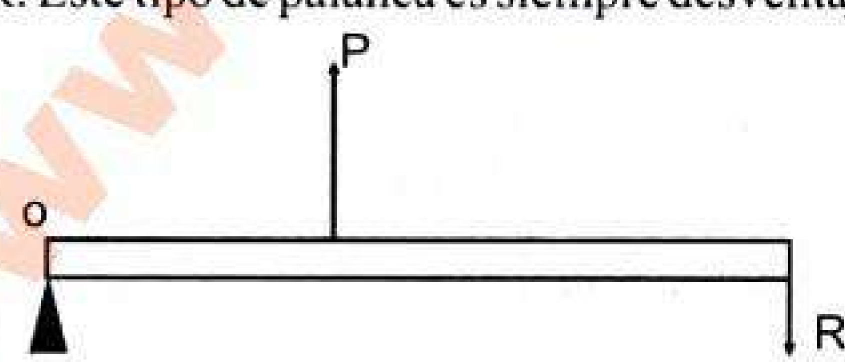


Uso de la carretilla

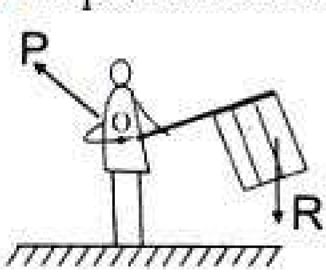


Uso de los remos de un bote

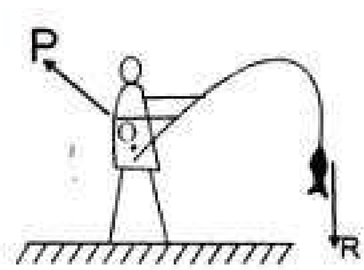
Tercer género: el punto de apoyo está en el extremo y la potencia P está entre el apoyo y la fuerza R. Este tipo de palanca es siempre desventajosa porque $b_P < b_R$:



Aplicaciones de la palanca de tercer género:



El asta que lleva el abanderado



Uso de la caña de pescar

En las máquinas simples ideales, el trabajo producido por la potencia es igual al trabajo consumido por la resistencia:

$W_p = W_R$

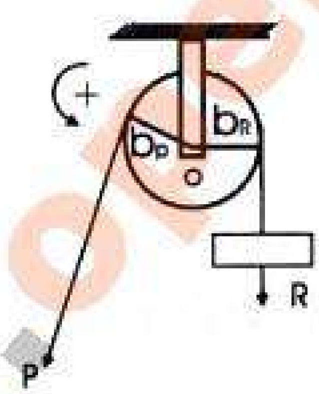
$P.b_p = R.b_R$

$$\frac{P}{R} = \frac{b_R}{b_p} \qquad \textbf{(2.7.3)}$$

De esta ecuación podemos deducir que las fuerzas son inversamente proporcionales a los desplazamientos realizados (en un mismo tiempo). Esto nos permite concluir que *lo que se gana en fuerza se pierde en velocidad o inversamente lo que se gana en velocidad se pierde en fuerza.*

Polea: es una rueda que puede girar libremente alrededor de su eje, por cuyo borde acanalado pasa una cuerda. Las poleas son fijas o móviles:

Polea Fija: es una palanca de primer género cuyo eje es fijo, donde la potencia se aplica a un extremo de la cuerda y la resistencia al otro:



$b_P = b_R$

Como los brazos de potencia y resistencia son iguales y los desplazamientos realizados por la potencia y resistencia también son iguales, la polea fija cambia solamente la dirección de la potencia, mantenimiento constante su magnitud.

La condición de equilibrio es:

$\Sigma M_o = 0$

$P.b_p - R.b_R = 0 \qquad \textbf{(2.7.4)}$

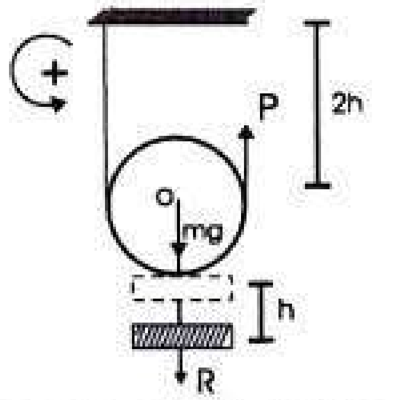
$P = R$

La ventaja mecánica es:

$$V.M. = \frac{R}{P}$$

$V.M. = 1$

Polea Móvil: es una palanca de segundo género cuyo eje es móvil, donde la potencia se aplica en un extremo de la cuerda, mientras el otro extremo es fijo:



$$b_p = 2\,b_R$$
$$d_p = 2\,d_R$$

Como el brazo de la potencia es el doble que el brazo de la resistencia y de desplazamiento realizado por la potencia es el doble que el realizado por la resistencia, la polea móvil cambia la dirección y el módulo de la potencia a la mitad de la resistencia.

La Ecuación de equilibrio es:

$\Sigma M_o = 0$

$P.\,b_p - (R+mg)\,b_R = 0$

$P(2b_R) = (R+mg)\,b_R$

$P = 1/2\,(R+mg)$

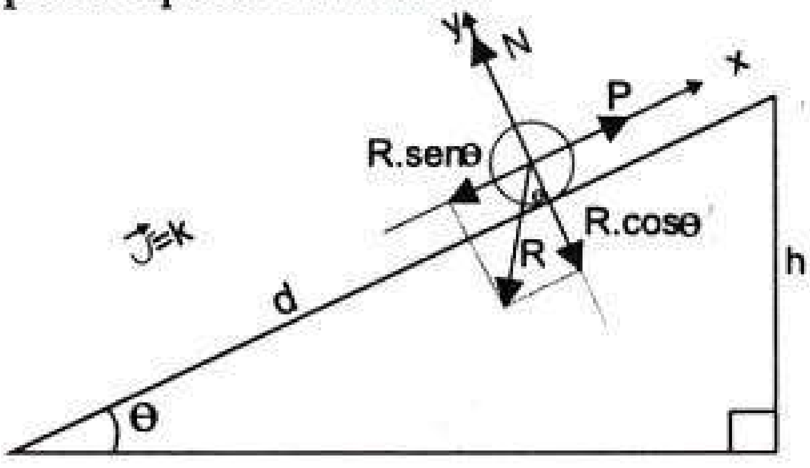
La ventaja mecánica es:

$V.M = \dfrac{R}{P}$

$V.M = \dfrac{R}{R/2}$; si la masa de la polea es despreciable

$V.M = 2$

Plano inclinado (cuña): una de las máquinas simples más conocidas es el plano inclinado sobre la horizontal y se utiliza para reducir la magnitud de la potencia necesaria para mover un cuerpo a lo largo del plano inclinado, donde la resistencia opuesta por el cuerpo es el peso del mismo:



Para subir un cuerpo a un camión se utiliza un tablón que forma un plano inclinado, por el cual se desliza el cuerpo. La potencia necesaria es menor que si se levanta el cuerpo verticalmente, pero el desplazamiento es mayor.
Aplicando la condición de equilibrio tenemos que:

$\Sigma Fx = 0$

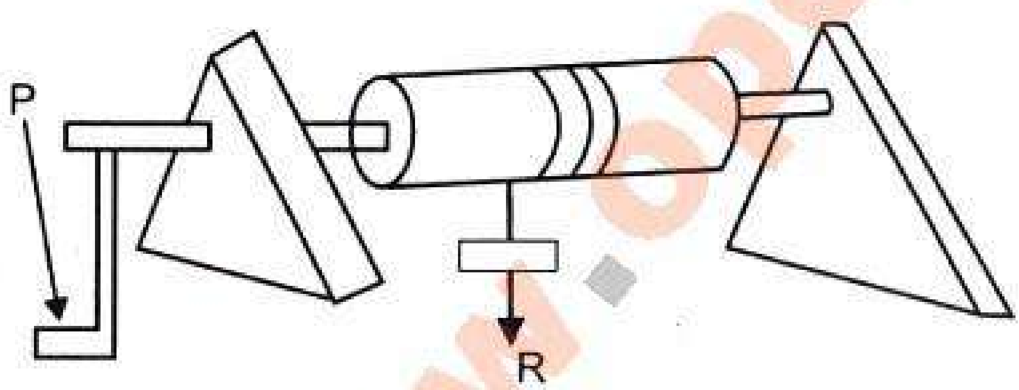
$P = R \operatorname{sen} \theta$

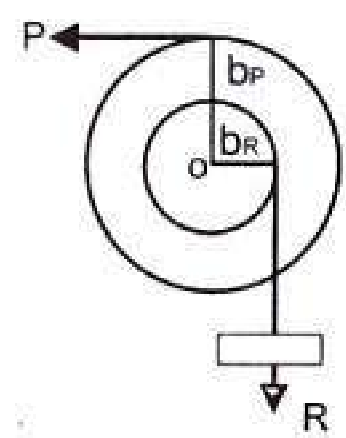
$$P = \frac{R.h}{d} \qquad \textbf{(2.7.6)}$$

De esta ecuación podemos deducir que cuanto mayor es la longitud del plano (d) con respecto a su altura (h), menor es la potencia necesaria para vencer la resistencia.
La ventaja mecánica es:

V.M. = R/P
V.M. = d/h

Torno: es un cilindro horizontal unido a una manivela que gira alrededor de su eje. Entorno al cilindro se enrolla una cuerda que levanta la carga (R) y sobre la manivela se aplica la fuerza motriz (P):





Corte transversal del torno

El torno es una palanca de primer género de brazos desiguales, donde el $b_p > b_R$ por lo que la potencia es siempre menor que la resistencia, y la máquina es ventajosa.

La condición de equilibrio es la misma que la de la palanca:

$\Sigma M_o = 0$

$P.b_p = R.b_R$

$$P = \frac{R.b_R}{b_R}$$

De esta ecuación deducimos que la potencia es inversamente proporcional a la longitud de la manivela, lo que significa que para obtener mayor fuerza se sacrifica la velocidad y la distancia recorrida.

La ventaja mecánica es:

$$\text{V.M.} = \frac{R}{P}$$

$$\text{V.M.} = \frac{b_P}{b_R}$$

De la ecuación anterior deducimos que en ésta máquina la ventaja mecánica es mayor que 1.

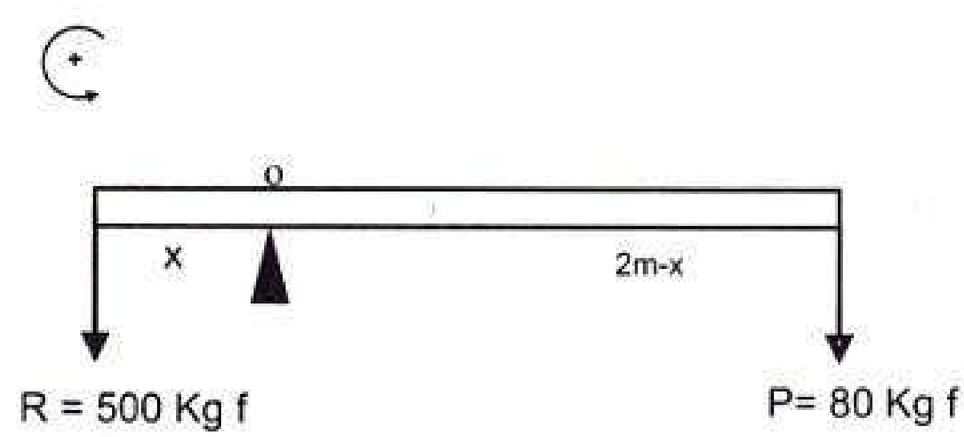
Ejemplos:

1.- Con una barra de 2m de longitud se mueve un cuerpo de 500kg localizado en uno de sus extremos haciendo una fuerza de 80kgf en el otro. Calcular dónde está el punto de apoyo cuando:
   a) La barra tiene peso despreciable
   b) La barra pesa 8kgf
   c) La ventaja mecánica (en cada caso)

   a) $\Sigma\, Mo = 0$
   $500kgf.x - 80\,kgf(2m-x) = 0$
   $500\,kgf.x = 160khf.m - 80kgf.x$
   $500kgf.x = 160kgf.m$

$$x = \frac{160\ kgf\ .\ m}{580\ kgf} = 0{,}276\ \text{m}$$

$$\text{V.M.} = \frac{R}{P} = \frac{500kgf}{80kgf} = 6{,}25$$



b) $\Sigma Mo = 0$

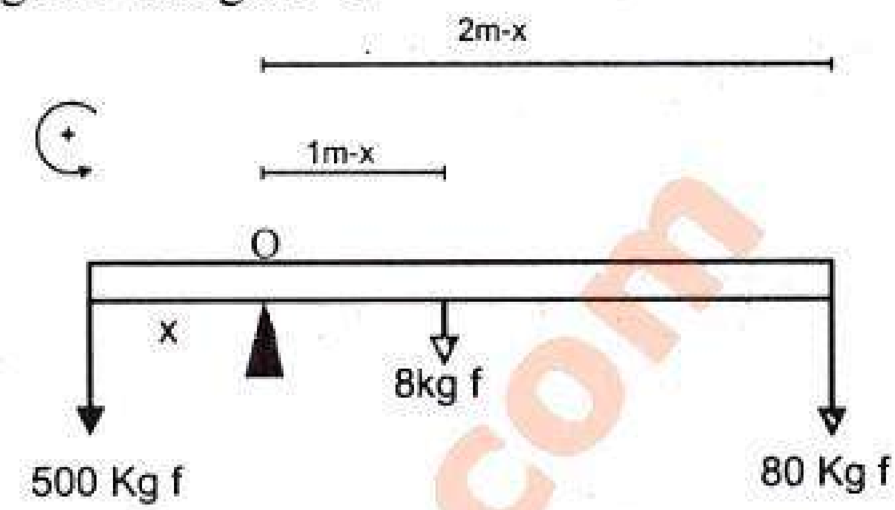
$500kgf.x - 8\,kgf(m\text{-}x) - 80\,kgf(2m\text{-}x) = 0$

$500\,kgf.x - 8\,kgfm + 8kgfx - 160kgf.m + 80kgf.x = 0$

$588kgf.x = 168kgf.m$

$$x = \frac{168\ kgf\ .\ m}{588\ kgf} = 0{,}286\ m$$

$$V.M. = \frac{R}{P} = \frac{500kgf}{80\ kgf} = 6{,}25$$



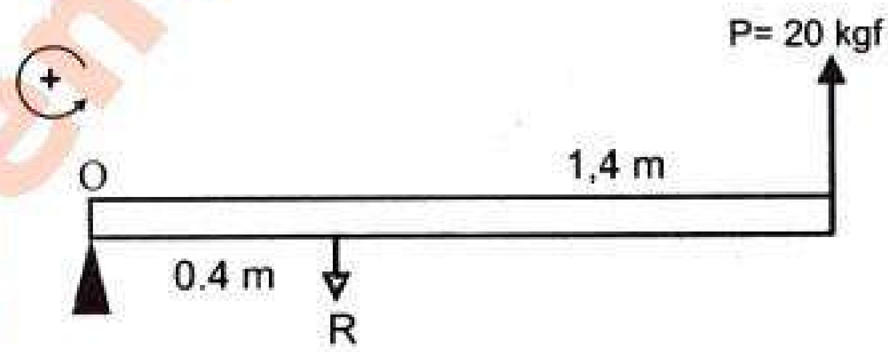
2. Con una carretilla de 1.4m de longitud se transporta un objeto situado a 40cm de la rueda, haciendo una fuerza de 20kgf. Calcular el peso del objeto cuando:
 a) El peso de la carretilla es despreciable
 b) El peso de la carretilla es 25 kgf
 c) La ventaja mecánica

a) $\Sigma Mo = 0$

$20kgf\ .\ 1{,}4m - R.0{,}4m = 0$

$$R = \frac{28kgf}{0{,}4\ m} = 70\ kgf$$

$$V.M. = \frac{R}{P} = \frac{70kgf}{20\ kgf} = 3{,}5$$



b) $\Sigma Mo = 0$

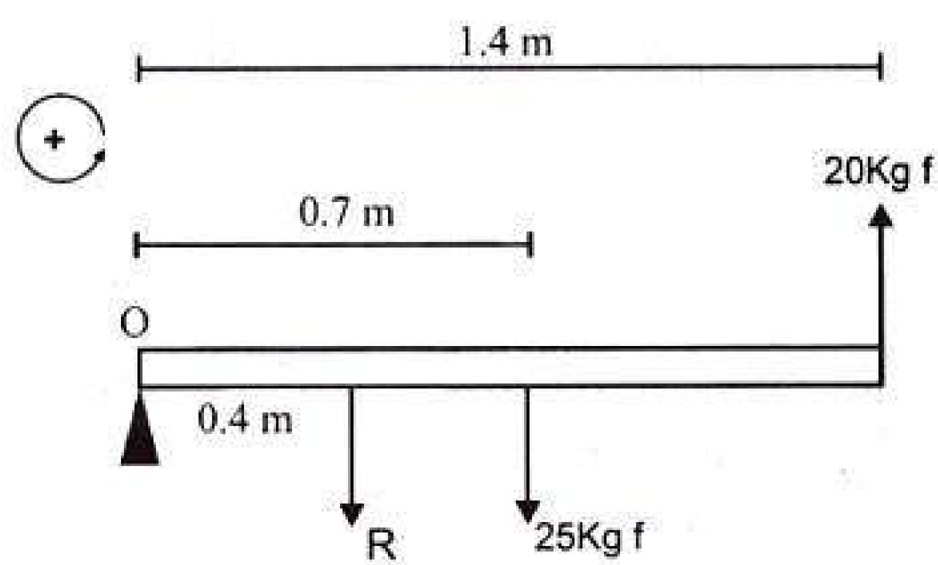
$20kg.1{,}4m - 25\,kgf.\ 0{,}7m - R.0{,}4m = 0$

$28\ kgf.m - 17{,}5\ kgf.m = R.0{,}4m$

$$R = \frac{10{,}5\ kgf.\ m}{0{,}4\ m}$$

$R = 26{,}25\ kg$

c) $V.M. = \dfrac{R}{P} = \dfrac{26.25kgf}{20\ kgf} = 1{,}31$

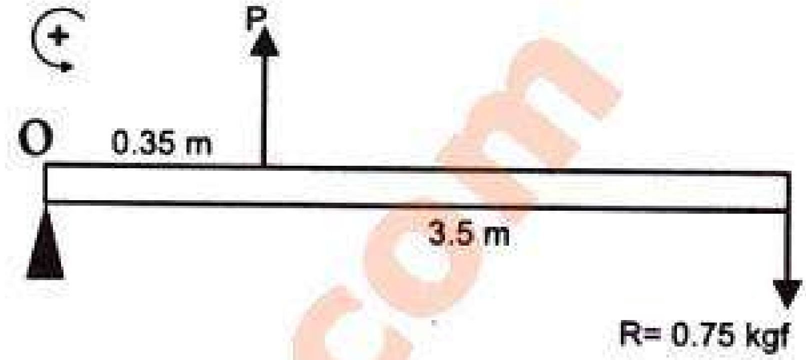


3.- Cuando un pescador tiene el extremo de una caña de 3.5 m de longitud un pez de 750g, la caña se pone horizontal. Si las manos del pescador están a 35 cm del otro extremo, calcular la fuerza necesaria para equilibrar la caña, cuando:

a) la caña tiene peso despreciable

b) la caña pesa 2kgf

c) la ventaja mecánica



a) $\Sigma Mo = 0$

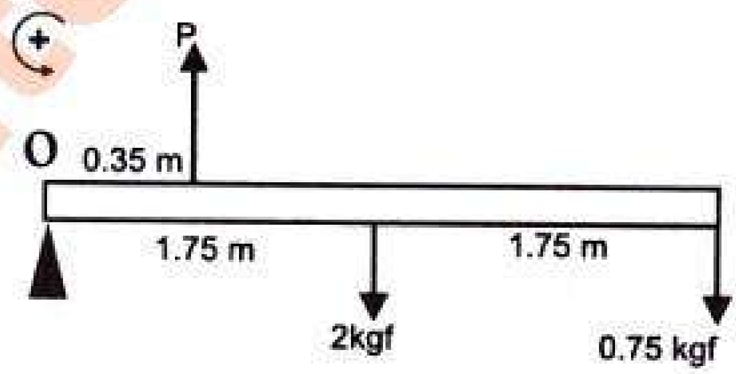
$P.0{,}35m - 0{,}75\ kgf.3{,}5m = 0$

$P.0{,}35m = 2{,}625\ kgf.m$

$$P = \frac{2{,}625\ kgf.m}{0{,}35m} = 7{,}5\ kgf$$

$$V.M. = \frac{R}{P} = \frac{0{,}75\ kgf}{7{,}5\ kgf} = 0{,}1$$

b) $\Sigma Mo = 0$



$P.0{,}35m - 2kg.\ 1{,}75m - 0{,}75\ kgf.3{,}5m = 0$

$P.0{,}35m = 3{,}5\ kgf.m + 2{,}625\ kgf.m$

$$P = \frac{6{,}125\ kgf.m}{0{,}35m} = 17{,}5\ kgf$$

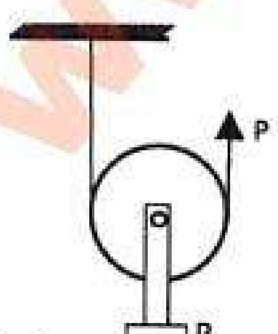
c) $$V.M. = \frac{R}{P} = \frac{0{,}75\ kgf}{17{,}5\ kgf} = 0{,}04$$

4.- En una polea móvil se aplica una fuerza de 35kgf para levantar un cuerpo. Si el recorrido de la potencia es 80 cm. Determinar:

a) El trabajo realizado por la potencia y resistencia cuando la polea tiene peso despreciable y cuando pesa 600g.

b) la ventaja mecánica en cada caso

c) Peso de la polea despreciable



$d_p = 2d_R$

$$P = \frac{R + \cancel{mg}^{\,0}}{2}$$

$d_R = d_p/2$

$d_R = 80\ cm/2$

$d_R = 40\ cm$

$R = 2P$

$R = 70\ kgf$

$W_R = R.d_R$

$W_R = 70\ kgf.\ 0{,}4m$

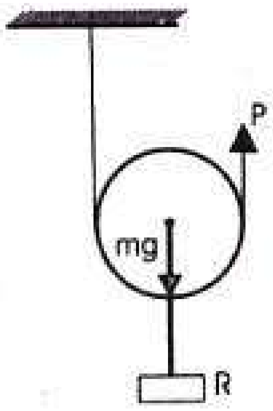
$W_R = 28\ kgm$

$W_p = P\ .\ d_p$

$W_p = 35kgf\ .\ 0{,}8m$

$W_p = 28\ kgm$

Peso de la polea 600 g:



$$d_P = 2d_R \qquad P = \frac{R + mg}{2}$$

$$d_R = \frac{d_P}{2} \qquad R = 2P - mg$$

$$d_R = \frac{80\ cm}{2} \qquad R = 70\ kgf - 5{,}88\ kgf$$

$$d_R = 40\ cm. \qquad R = 64{,}12\ kgf$$

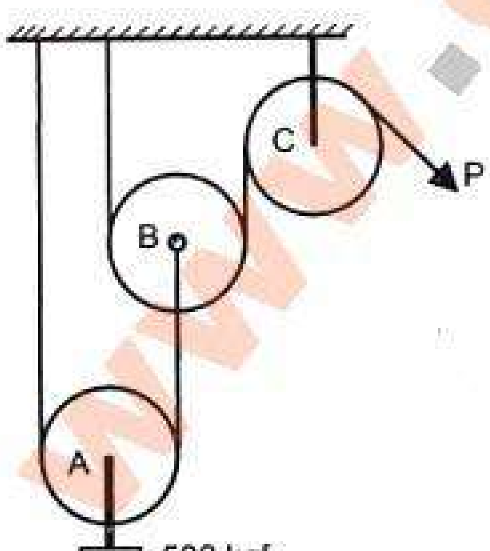
$W_R = R \cdot d_R$
$W_R = 64{,}12\ kgf \cdot 0{,}4\ m$
$W_R = 25{,}65\ kgm$

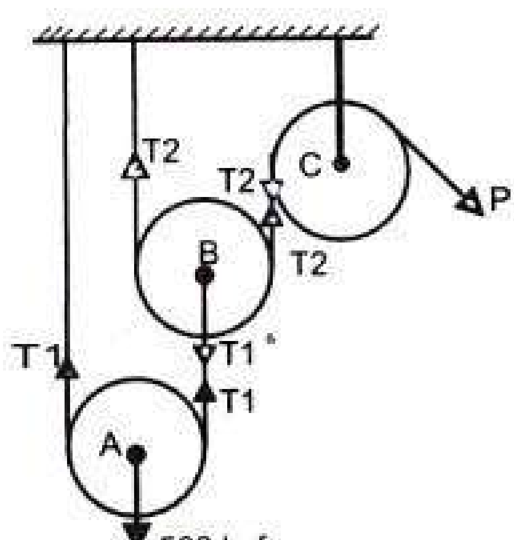
$W_P = P \cdot d_P$
$W_P = 35 kgf \cdot 0{,}8 m$
$W_P = 28\ kgm$

$$V.M_1 = \frac{R}{P} = \frac{70\ kgf}{35\ kgf} = 2$$

$$V.M_2 = \frac{R}{P} = \frac{64{,}12\ kgf}{35\ kgf} = 1{,}83$$

5.- En el sistema de poleas representado en la figura, si la fricción y el peso de las poleas es despreciable, determinar:
a) El valor de la fuerza P para levantar con υ = cte un cuerpo de 500kgf.
b) La ventaja mecánica del sistema.





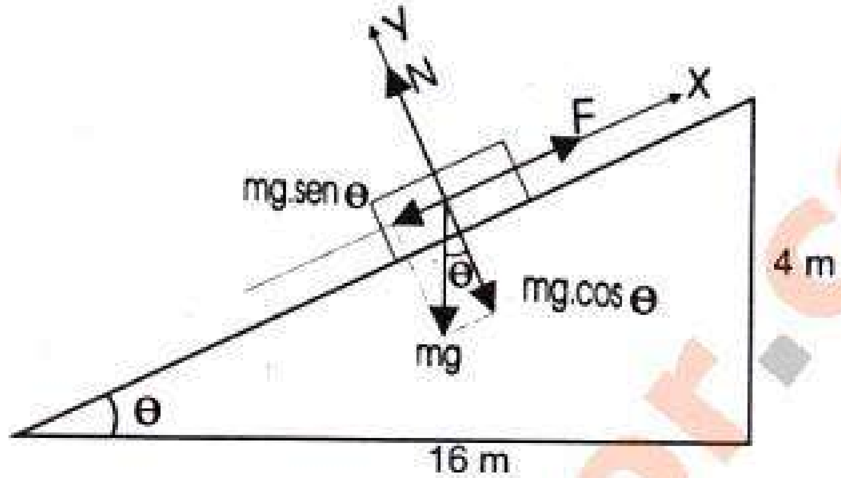
a) Polea móvil A:
$T_1 = ½ (R+mg)$
$T_1 = ½ (500\ kgf)$
$T_1 = 250\ kgf$

Polea móvil B:
$T_2 = ½ (R + mg)$
$T_2 = ½ (250\ kgf)$
$T_2 = 125\ kgf$

Polea fija C:
$P = T_2$
$P = 125\ kgf$

b) $V.M. = \frac{R}{P} = \frac{500\ kgf}{125\ kgf} = 4$

6.- En el plano inclinado de la figura, un cuerpo de 8kg parte del reposo en el punto más bajo y alcanza el punto más alto en 7s. Determinar:
a) Qué fuerza paralela al plano inclinado se ha ejercido sobre el cuerpo
b) La ventaja mecánica del plano inclinado



a) $x^2 = (16m)^2 + (4m)^2$
$x = 16{,}49m$

$tag\theta = \frac{4\ m}{16m}$

$\theta = 14{,}04°$

$\Sigma Fx = ma$
$F - mg \cdot sen\theta = ma$

$F = ma + mg.sen\theta$
$F = 8kg(0{,}67\ m/s^2) + 8kg(9{,}8m/s^2)sen\ 14{,}04°$
$F = 5{,}36\ (N) + 19{,}02\ (N)$
$F = 24{,}38\ (N)$

$x = ½a(\Delta t)^2$

$a = \frac{2x}{\Delta t^2} = \frac{2(16{,}49)}{49s^2}$

$a = 0{,}67\ m/s^2$

b) $V.M. = \frac{R}{P} = \frac{mg}{F} = \frac{78{,}4\ (N)}{24{,}38\ (N)} = 3{,}22$

7.- Para levantar un cuerpo de 200kg se hace una fuerza de 400(N) en un torno cuyo radio es de 15 cm. Si $\mu = 0$ hallar:
a) El radio de la manivela
b) La ventaja mecánica

a) $P = \dfrac{R.b_R}{b_P}$

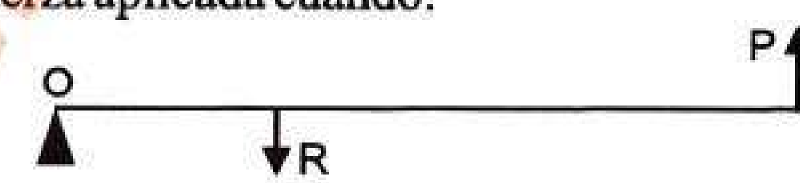
$$b_P = \frac{R.b_R}{b_P} = \frac{200kg.9{,}8\ m/s^2\ .\ 15\ cm}{400\ (N)} = 73{,}5\ \text{cm}$$

b) $$V.M. = \frac{R}{P} = \frac{200kg.9{,}8\ m/s^2}{400\ (N)} = 4{,}9$$

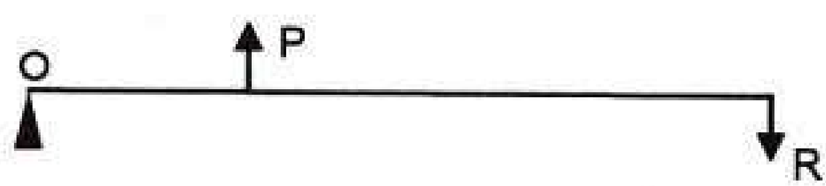
2.8 EJERCICIO No. 5

1.- Con una barra de 2.4m de longitud se quiere mover un cuerpo de 360kg. Se sitúa el punto de apoyo entre la potencia y la resistencia y a 50cm del cuerpo.
Calcular la fuerza necesaria cuando:
a) El peso de la barra es despreciable
b) El peso de la barra es 10kgf.

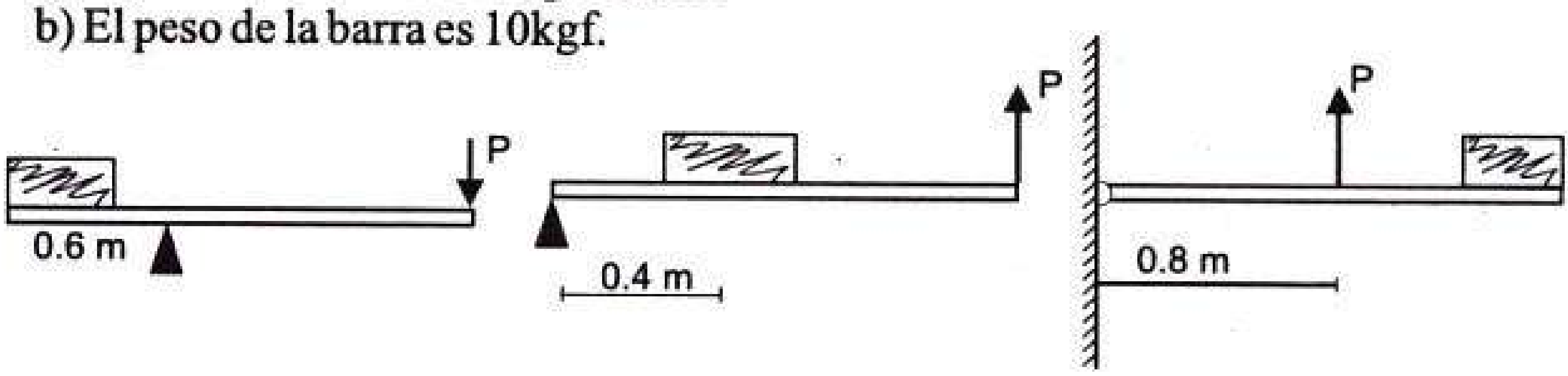
2.- Con una carretilla de 1.6m de longitud se requiere transportar una carga de 180kg situada a 35cm de la rueda. Calcular la fuerza aplicada cuando:
a) El peso de la carretilla es despreciable
b) El peso de la carretilla es de 50kg.



3.- Un abanderado hace con las manos una fuerza de 15kgf a 40cm del un extremo del asta de 2.2m de longitud para mantenerla horizontal. Cuál es el peso de la bandera colocada en el otro extremo cuando:
a) El peso del asta es despreciable
b) El peso del asta es 2.8 kgf
c) La ventaja mecánica en cada caso



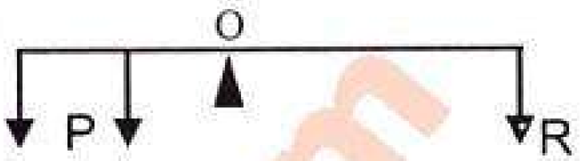
4.- Para levantar un cuerpo de 100kg de tres maneras diferentes se utiliza una barra de 2m de longitud. Calcular la fuerza aplicada y la ventaja mecánica en cada caso cuando:
a) El peso de la barra es despreciable
b) El peso de la barra es 10kgf.



5.- Para mover un cuerpo muy pesado dos obreros usan una palanca de 3m de longitud. El punto de apoyo está entre los obreros y el cuerpo y a 60cm de este. Uno de los obreros hace una fuerza de 60kgf en el extremo de la palanca y el otro hace una fuerza de 75kgf a 50 cm del anterior. Calcular el peso del cuerpo cuando:

a) El peso de la barra es despreciable

b) El peso de la barra es 15kgf

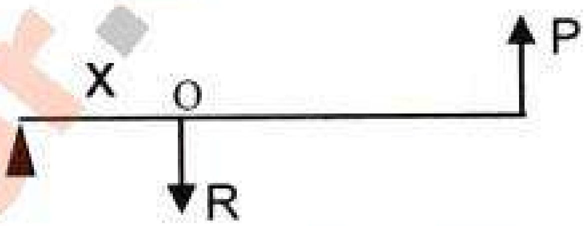


6.- Con una carretilla de 1.75m de longitud se transporta una carga de 200kg aplicando una fuerza de 80kgf. A qué distancia de la rueda esta la carga cuando:

a) El peso de la carretilla es despreciable

b) El peso de la carretilla es 45kgf

c) La ventaja mecánica en cada caso

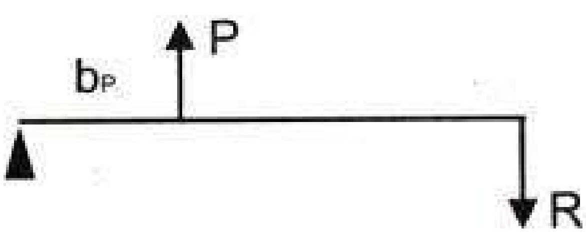


7.- Un pescador sostiene horizontalmente una caña de pescar de 2.6m de longitud con una fuerza de 8kgf. Si en el un extremo esta un pescado de 600g, a que distancia del otro extremo estarán colocadas las manos del pescador, cuando:

a) El peso de la caña es despreciable

b) El peso de la caña es 1.2kgf

c) La ventaja mecánica en cada caso



8.- El trabajo realizado por la potencia de una polea móvil para levantar un cuerpo de 100kg es 764(J). Calcular la potencia y las distancia recorrida por la misma cuando:

a) El peso de la polea es despreciable

b) El peso de la polea es 700kg

c) La ventaja mecánica en cada caso

9.- Para levantar un cuerpo con una polea móvil de 520g se aplica una fuerza de 45kgf, la misma que tiene un recorrido de 70cm. Determinar:

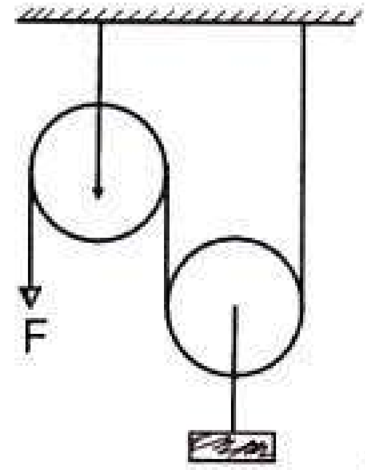
a) El peso del cuerpo

b) La distancia recorrida por el cuerpo

c) El trabajo realizado por el peso del cuerpo

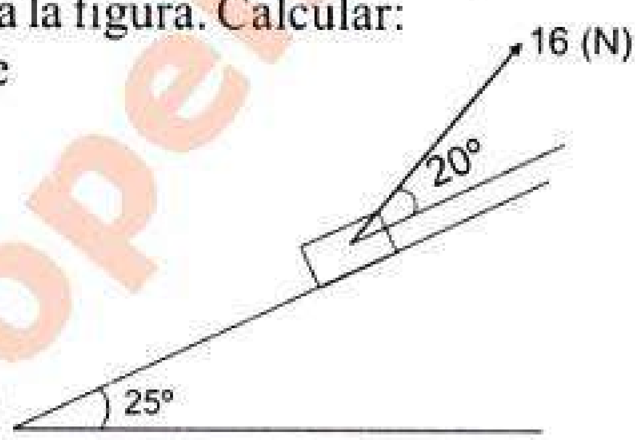
d) La ventaja mecánica

10.- En la figura, qué fuerza F se necesita para elevar un cuerpo de 1000kg con velocidad constante y cuál es su ventaja mecánica.



11.- Una persona de 65kg sube por un plano inclinado de 5m de altura y 13 de longitud. Determinar:
a) La fuerza motor desarrollada por persona
b) El trabajo realizado
c) La ventaja mecánica

12.- Un cuerpo de 2kg es empujado hacia arriba de un plano inclinado liso con una fuerza de 16(N) como indica la figura. Calcular:
a) La aceleración del bloque
b) La ventaja mecánica



13.- En un torno de 15 cm de radio y 50 cm de manivela se aplica una fuerza de 400(N). Hallar:
a) El peso que se puede levantar
b) La ventaja mecánica

14.- Se levanta un cuerpo de 160kg con un torno, haciendo una fuerza de 100 (N). Si la manivela tiene un radio de 65cm, determinar:
a) El radio del torno
b) La ventaja mecánica

2.9 EVALUACIÓN OBJETIVA

Completar:

1.- En una palanca, cuando se .... en fuerza se pierde en....................... y cuando se gana en .... se ....en fuerza.

2.- La potencia es ....proporcional al tiempo empleado en realizar trabajo.

3.- En una gráfica fuerza-desplazamiento, si la curva es paralela al eje del desplazamiento, significa que la fuerza es...

4.- El producto punto del vector fuerza por el vector desplazamiento es ....

5.- Una palanca es de segundo género cuando...............................está entre.......................y.....................................

6.- El trabajo realizado por las fuerzas perpendiculares al desplazamiento es ....

7.- En una gráfica fuerza- desplazamiento, el área entre la curva y el desplazamiento es...

8.- En un motor la fuerza neta es.................................... proporcional a la velocidad media.

9.- En el trabajo........................hay una transferencia de energía del cuerpo movido a sus alrededores.

10.- La misma algebraica del trabajo activo y resistivo se llama...............................
....

11.- Una palanca es de tercer género cuando... está entre......................y.................................

12.- Para obtener la potencia en watt el trabajo debe estar medido en .... y el tiempo en......................

13.- Si un cuerpo se mueve con velocidad constante, el trabajo neto es ....

14.- Cuando se levanta un cuerpo del piso por la acción de una fuerza F, el trabajo de F es ...., porque la fuerza y el desplazamiento producido tienen.................................dirección, y el trabajo de la fuerza gravitacional es..............................,porque la fuerza gravitacional y el desplazamiento producido tienen.........................dirección.

15.- Una palanca es de primer género cuando..................................está entre......................................y..

16.- El rendimiento es la relación entre.. y el trabajo producido

17.- En un gráfico fuerza - desplazamiento si la curva establece una relación directa entre la fuerza y el desplazamiento, significa que la fuerza......................
....

18.- El trabajo es una es una magnitud escalar que relaciona dos magnitudes vectoriales:........................y........................

19.- Si la fuerza y el desplazamiento tienen la misma dirección y sentido, el trabajo viene dado...

20.- En una palanca de tercer género, se gana en...............................porque el brazo de ....es menor que el de..................................

Escribir (V) verdadero o (F) falso:

1.- La fuerza centrípeta no realiza trabajo...( )

2.- En una polea fija la condición de equilibrio es que la fuerza aplicada sea igual a la resistencia ....( )

3.- Una persona que está parada sujetando un peso sobre su espalda, si realiza trabajo..........( )

4.- En una palanca la condición de equilibrio es que la suma de los momentos de la fuerza aplicada y de la resistencia sea nula..........( )

5.- El trabajo realizado por una fuerza es una cantidad vectorial..........( )

6.- Siempre que se realice más fuerza, más velocidad se obtiene..........( )

7.- Una fuerza que cambia la dirección en que se mueve un cuerpo y no cambia la magnitud de su velocidad, no realiza trabajo..........( )

8.- El trabajo neto es el trabajo realizado por las fuerzas activas..........( )

9.- Cuando la suma de las fuerzas activas es igual a la suma de las fuerzas resistivas la partícula tiene únicamente M.R.U..........( )

10.- En un torno la condición de equilibrio es que la suma de los momentos de las fuerzas aplicadas sea nula..........( )

11.- Si el desplazamiento realizado por una partícula es cero, significa que el trabajo neto es nulo..........( )

12.- Una fuerza produce trabajo cuando realiza un cambio en la posición o en la rapidez de un cuerpo..........( )

13.- En una polea móvil la condición de equilibrio es que la fuerza aplicada sea la mitad de la resistencia..........( )

14.- Si el tiempo empleado es constante, a mayor potencia mayor trabajo..........( )

15.- Si el trabajo realizado por una máquina es el mismo, la potencia es mayor cuando el tiempo empleado es mayor..........( )

16.- Si un obrero desea subir con menos esfuerzo unos ladrillos a un tercer piso de su edificio, debe emplear una polea fija..........( )

17.- La función de una polea fija es cambiar la dirección de una fuerza...............( )

18.- Las tijeras son un ejemplo de las palancas de primer género, porque el punto de apoyo (A) se encuentra entre las dos fuerzas..( )

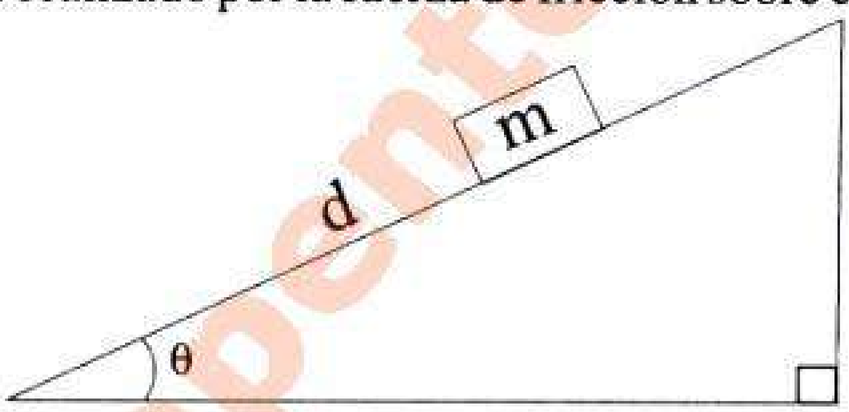
19.- Cuando la fuerza no tiene la misma dirección del desplazamiento, la ecuación que nos permite calcular el trabajo realizado es $W = F.d.\,\text{sen}\,\theta$ ....( )

20.- En un plano inclinado la condición de equilibrio es que el producto de la fuerza aplicada por la longitud del plano sea igual al producto de la resistencia por la altura del mismo..( )

Subrayar la respuesta correcta:

1.- En la figura el cuerpo resbala hacia abajo con velocidad constante. Al final del plano inclinado el trabajo realizado por la fuerza de fricción sobre el cuerpo es:

a) -m.g.d.sen 0
b) -m.g.d.cos 0
c) -mg.d.tang 0
d) N.R.A.



2.- La ventaja mecánica de una máquina simple, en la que se desprecia el rozamiento es:

a) ideal
b) real
c) no tiene significado
d) no existe

3.- Se suelta un cuerpo de cierta altura. La fuerza gravitacional:

a) realiza trabajo negativo
b) realiza trabajo que depende de la altura
c) realiza trabajo que depende de la resistencia del aire
d) realiza trabajo que depende de la velocidad adquirida

4.- En una máquina:

a) $W_{\text{perdido}} = W_{\text{útil}} - W_{\text{producido}}$
b) $W_{\text{útil}} = W_{\text{producido}} + W_{\text{perdido}}$
c) $W_{\text{producido}} = W_{\text{perdido}} - W_{\text{útil}}$
d) $W_{\text{perdido}} = W_{\text{producido}} - W_{\text{útil}}$

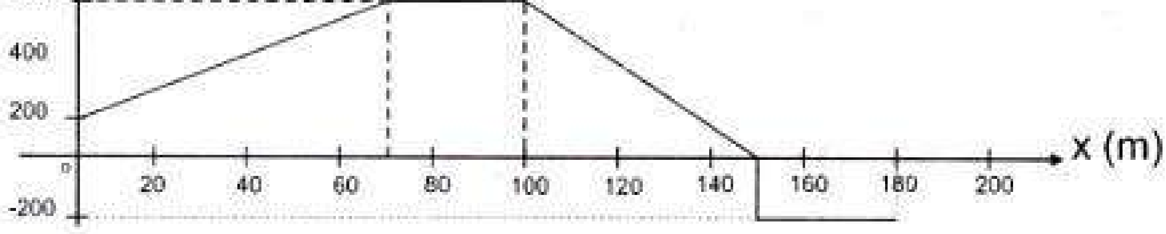
5.- En el gráfico fuerza-desplazamiento, si la curva es una línea paralela al eje de las X significa que la fuerza es:
a) variable
b) constante
c) nula
d) N.R.A

6.- Dos obreros mueven dos cuerpos en dirección horizontal ($m_1=m_2$ y $d_1=d_2$). Si el primero empuja el cuerpo por una superficie que no tiene razonamiento y el segundo levanta el cuerpo, lo carga la distancia indicada y posteriormente baja el cuerpo, determinar si:
a) el primero hace menor trabajo que el segundo
b) el primero hace más trabajo que el segundo
c) ninguno hace trabajo
d) la cantidad de trabajo que hace uno depende del tiempo que emplearon.

7.- Una persona de 70Kg sube la escalera de su casa en 50s, si la escalera tiene 30 gradas de 20 cm de altura cada una, el trabajo realizado por la persona en contra de la gravedad es:
a) no hace trabajo
b) para que realice trabajo es necesario que la persona suba con movimiento acelerado
c) 4116 J
d) N.R.A

8.- Si una máquina tiene el rendimiento del 80%, qué parte de los 50Kgm de entrada produce trabajo:
a) 0.525 Kgm
b) 16 Kgm
c) 40 Kgm
d) 10 Kgm

9.- Una partícula de 200 kg se mueve por una trayectoria recta ($\mu=0$) bajo la acción de una fuerza como indica el siguiente gráfico.



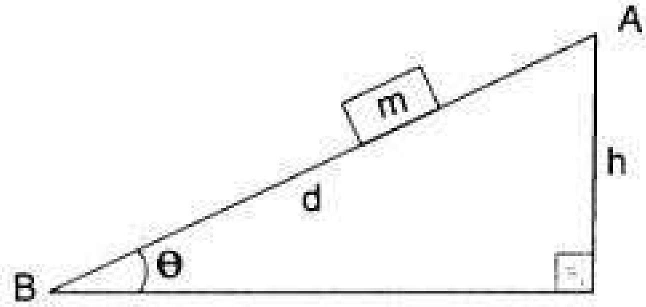
9.1 En el trayecto de 0 a 70m, el trabajo realizado sobre la partícula es:
a) 56 KJ
b) 42 KJ
c) 14 KJ
d) 28 KJ

9.2 En el punto x= 100m la partícula tiene una aceleración de:
a) $2 m/s^2$
b) $30 m/s^2$
c) $3 m/s^2$
d) $9{,}8 m/s^2$

9.3 En el trayecto de 0 a 180m el trabajo realizado sobre la partícula es:
a) 55 KJ
b) 61 KJ
c) 67 KJ
d) 10,8 KJ

10. El trabajo realizado para acelerar un móvil de 0 hasta 20 m/s es:
a) menor que el necesario para acelerarlo desde 20 m/s hasta 40 m/s
b) igual que el necesario para acelerado desde 20 m/s hasta 40 m/s
c) mayor que el necesario para acelerarlo desde 20 m/s hasta 40m/s
d) cualquiera de los anteriores, dependiendo del tiempo empleado para cambiar la rapidez.

11. En la figura el trabajo realizado por el peso del cuerpo (mg) al descender desde A hasta B es:
a) $mgd \cdot \cos\theta$
b) mgd
c) $mgh \cdot \cos\theta$
d) mgh



12. Las dimensiones de la potencia son:
a) $[MLT^{1}]$
b) $[ML^{2}T^{0}]$
c) $[ML^{2}T^{2}]$
d) N.R.A.

13.-Un motor que tiene una potencia constante de 500 w trabaja durante una hora. El trabajo realizado por el motor es:
a) 500 J
b) 360.000 J
c) 0,5 kwh
d)1600 J

14.- Las máquinas se pueden utilizar para hacer cada una de las siguientes cosas, excepto:
a) cambiar la dirección de una fuerza
b) aumentar la velocidad
c) multiplicar la fuerza
d) aumentar un trabajo

15.- Para subir un cuerpo de 10,204 kg a una altura de 200 m, se dispone de un motor de ¼ HP:
a) no es posible subir con ese motor
b) para subir el cuerpo se necesita por lo menos 40 minutos
c) en cerca de 2 minutos es posible subir el cuerpo
d) el tiempo no depende en la potencia del motor.

16.- Tres hombres A,B,C cargan cuerpos iguales desde el piso hasta un camión. A levanta sus cuerpos verticalmente del piso hasta el camión, B desliza sus cuerpos hacia arriba por una tabla rugosa ($\mu \neq 0$) y C desliza sus cuerpos hacia arriba por una tabla igual a la de B pero con rodillos sin fricción ($\mu=0$). Si los hombres cargan el mismo número de bloques determinar si:
a) $W_A > W_B$ y $W_B > W_C$
b) $W_A = W_C$ y W_B es mayor
c) $W_B > W_C > W_A$
d) $W_A = W_B = W_C$

17.- Una bomba retira 1200 litros a nivel del suelo y en 5 minutos los transporta a un reservorio situado a 25 m de altura (1 litro =1kgf):
a) el trabajo que la bomba realiza sobre el agua es de 60.000 w/h
b) la potencia media de la bomba es 12,00 w
c) la potencia media de la bomba es 1,33 CV
d) la potencia media de la bomba es 100 kgm/s

18.- En una partícula animada de movimiento uniforme, el trabajo que realiza la fuerza resultante sobre la partícula es:
a) nulo si la trayectoria es recta
b) nulo en cualquier trayectoria
c) nulo o positivo si la trayectoria es curva
d) nulo para fuerzas internas

19.- Una polea fija se suspende a 12 m sobre el piso con una cuerda enrollada sobre ella. Para elevar un cuerpo de 100kg atado en un extremo de la cuerda, la fuerza sobre el otro extremo de la cuerda deberá ser de:
a) 25 kgf
b) 50 kgf
c) 75 kgf
d) 100 kgf

20.- La relación entre la potencia útil y la potencia producida es:
a) el trabajo activo
b) la potencia neta media
c) la eficiencia
d) N.R.A.

3. CONSERVACION DE LA ENERGIA

La palabra *energía* derivada del griego en = dentro y ero = trabajo, significa la capacidad para producir trabajo.

Una de las características más importantes de la energía, es la variedad de las *formas de presentación*, hay una energía en cuerpos que se mueven, pero también lo hay en los que *no* se mueven.

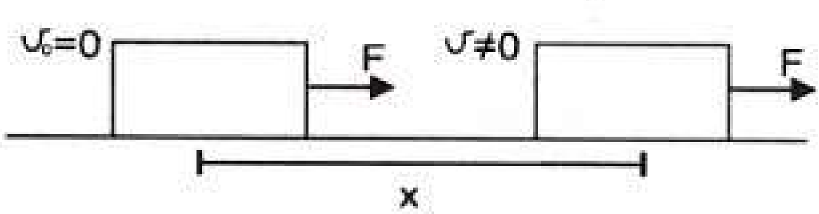
Entre las principales formas de energía, tenemos:

- Energía Cinética, es la que tienen los cuerpos en un movimiento de traslación o rotación.
- Energía Potencial Gravitacional, es la que tiene los cuerpos a determinada altura con respecto a un plano de referencia
- Energía Potencial Elástica, es la que tiene resorte cuando está estirado o comprimido
- Energía Química, es la que tienen los combustibles
- Energía Solar, es la que nos proporciona el sol en forma luminosa o calórica.
- Energía Aehólica, es la que nos proporciona el viento
- Energía Geotermal, es la que tiene el interior de la tierra en forma de calor, principalmente en las zonas volcánicas.
- Energía Hidráulica, es la que tiene el agua cuando está en suelo irregular.
- Energía Nuclear, es la que se libera en las reacciones nucleares.

Cada una de estas formas de energía tiene una expresión matemática que permite calcular su valor.

3.1 ENERGIA CINETICA

El cuerpo de la figura tiene una masa m y está inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin rozamiento. Si ejercemos sobre el una fuerza horizontal y constante F, la velocidad del cuerpo irá aumentando constantemente y al cabo de cierto tiempo habrá recorrido una distancia x:



El trabajo realizado por está fuerza sobre el cuerpo es:

$W = F.x$
$W = m.a.x$ **(1)**

La velocidad del cuerpo cuando ha recorrido una distancia x es:

$V^2 = V_o^2 + 2ax$

$V^2 = 2ax \Rightarrow ax = \frac{V^2}{2}$ **(2)**

reemplazando (2) en (1):

$W = m\frac{V^2}{2}$

Expresión que representa la energía cinética del cuerpo en el instante que tiene una rapidez V.

$Ec = \frac{1}{2} mV^2$ **(3.1.1)**

Se define a la energía cinética diciendo que es la capacidad que tiene un cuerpo para producir trabajo en virtud de su rapidez.

De la ecuación (3.1.1) podemos concluir que:

- La energía cinética es directamente proporcional a la masa del cuerpo.
- La energía cinética es directamente proporcional al cuadrado de la rapidez del cuerpo.
- La energía cinética no depende de la dirección en la que se está moviendo el cuerpo.

Unidades: La energía cinética es una magnitud escalar cuyas unidades son las mismas del trabajo:

En el SI: $Ec = 1/2\, mV^2$
$Ec = kg(m/s)^2$
$Ec = (kg.m/s^2)m$
$Ec = N.m$
$Ec = J$(julio)

En el CGS:

$$Ec = 1/2\, mV^2$$
$$Ec = g(cm/s)^2$$
$$Ec = (g.cm/s^2)cm$$
$$Ec = dina.cm$$
$$Ec = ergio$$

Dimensiones: Las dimensiones de la energía cinética son las del trabajo:

$Ec = 1/2\, mV^2$

$[Ec] = [M.L^2.T^{-2}]$

Ejemplos:

1. Se lanza un cuerpo de 350g con una velocidad inicial de $(25\vec{j})$ m/s. Hallar a los 5 segundos:

a) La rapidez del cuerpo

b) La energía cinética

a) $\vec{V} = \vec{V}o + \vec{g}.\Delta t$

$$\vec{V} = (25\vec{j})m/s + (-9{,}8\vec{j})m/s^2\,(5s)$$

$$\vec{V} = (25\vec{j})m/s - (49\vec{j})\, m/s$$

$$\vec{V} = (-24\vec{j})\, m/s$$
$$V = 24\, m/s$$

b) $Ec = 1/2\, mV^2$

$$Ec = 1/2\,(0{,}35\, kg)(24 m/s)^2$$
$$Ec = 100{,}8\, (J)$$

2.- Un cuerpo de 500g que posee una energía cinética de 16 (J) gira con un MCU de 1.2m de radio. Calcular:

a) Con qué rapidez está girando el cuerpo

b) La fuerza que actúa sobre el cuerpo

a) $Ec = ½\, mV^2$

$$V^2 = \frac{2Ec}{m} = \frac{32\,(J)}{0{,}5\, kg}$$

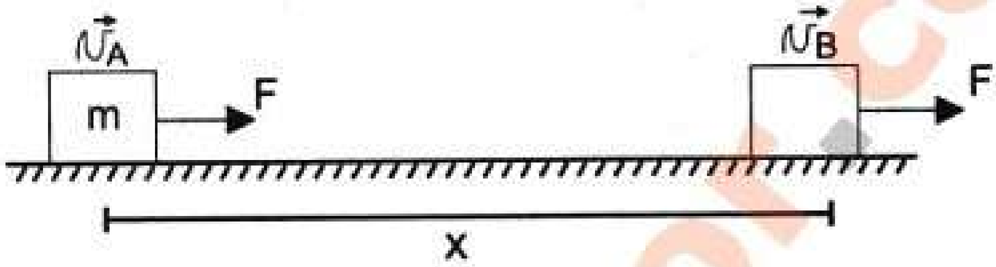
$$V = 8\, m/s$$

b) $F_c = m.a_c = m \dfrac{V^2}{R}$

$F_c = 0{,}5\,kg \dfrac{64\ m^2/s^2}{1{,}2\ m}$

$F_c = 26{,}67\ (N)$

Variación de energía Cinética: el cuerpo de la figura tiene una masa m y una velocidad V_A en el instante que empieza a actuar la fuerza horizontal y constante F. la velocidad del cuerpo irá aumentando constantemente y al cabo de cierto tiempo habrá recorrido una distancia x:



El trabajo efectuado por ésta fuerza sobre el cuerpo es:

$W_{A \to B} = F\,.\,x$

$W_{A \to B} = m.a.x$ **(1)**

La velocidad del cuerpo cuando ha recorrido una distancia x es:

$V_B^2 = V_A^2 + 2ax$

$ax = \dfrac{V_B^2 - V_A^2}{2}$ **(2)**

Reemplazando (2) en (1):

$= m.\dfrac{V_B^2 - V_A^2}{2}$

$W_{A \to B} = 1/2\, mV_B^2 - 1/2\, mV_A^2$

$W_{A \to B} = Ec_B - Ec_A$

$W_{A \to B} = \Delta Ec$ **(3.1.2)**

Esto nos demuestra que el trabajo realizado por la fuerza que actúa sobre el cuerpo es igual a la variación de su energía cinética.

De la ecuación (3.1.2) podemos concluir que:

- Si $V_B > V_A$, la ΔEc es una cantidad positiva y la fuerza neta aplicada realiza un trabajo positivo. Por consiguiente la energía cinética ha aumentado, la fuerza neta aplicada está a favor del movimiento y la partícula tiene movimiento acelerado.

- Si $V_B < V_A$, la ΔEc es una cantidad negativa y la fuerza neta aplicada realiza un trabajo negativo, por consiguiente la energía cinética ha disminuido, la fuerza neta aplicada esta en contra del movimiento y la partícula tiene un movimiento retardado.

- Si $V_B = V_A$, la ΔEc es nula y la fuerza neta aplicada no realiza trabajo. Por consiguiente la energía cinética permanece constante y la partícula tiene movimiento uniforme.

Ejemplos:

1. Un cuerpo de 3kg se mueve con una rapidez de 7.2 km/h. Si aumentamos la fuerza aplicada en 10 (N) hasta que la rapidez alcance los 18 km/h. Determinar:
   a) La energía cinética inicial
   b) La energía cinética final
   c) El trabajo realizado por el cuerpo
   d) La distancia recorrida

   $V_1 = 7{,}2\ km/h = 2 m/s$

   $V_2 = 18\ km/h = 5\ m/s$

   a) $Ec_1 = 1/2\ mV_1^2 = 1/2\ (3kg)(2m/s)^2$
   $Ec_1 = 6(J)$

   b) $Ec_2 = 1/2\ mV_2^2 = 1/2\ (3\ kg)\ (5m/s)^2$
   $Ec_2 = 37{,}5\ (J)$

c) $W_{1\text{-}2} = Ec_2 - Ec_1$
$W_{1\text{-}2} = 37{,}5\ (J) - 6(J)$
$W_{1\text{-}2} = 31{,}5\ (J)$

d) $W = Fx$

$$x = \frac{W}{F} = \frac{31{,}5\ (J)}{10\ (N)}$$

$x = 3{,}15$ m

2. Una fuerza de 100 dinas arrastra una distancia de 6cm a una partícula de 4g que posee una rapidez inicial de 3cm/s. Calcular: .
   a) El trabajo realizado por la fuerza
   b) La energía cinética inicial
   c) La energía cinética final
   d) La rapidez final del cuerpo

a) $W = F\,.x = 100$ dinas.6cm
$W = 600$ ergios

b) $Ec_1 = \frac{1}{2} mV_1^2 = 1/2\,(4g)(3cm/s)^2$
$Ec_1 = 18$ *ergios*

c) $W_{1\text{-}2} = Ec_2 - Ec_1$
$Ec_2 = W_{1\text{-}2} + Ec_1$
$Ec_2 = 600$ ergios $+ 18$ ergios
$Ec_2 = 618$ ergios

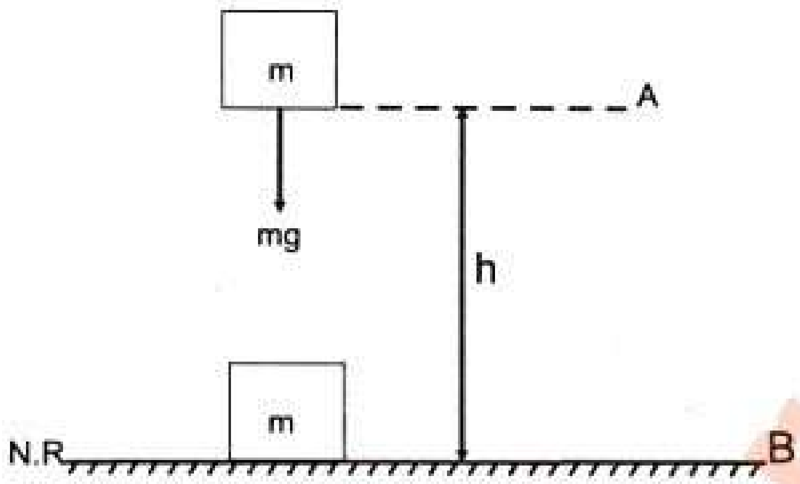
d) $Ec_2 = 1/2mV_2^2$

$$V_2^2 = \frac{2Ec_2}{m} = \frac{2(618\ ergios)}{4\ g}$$

$V_2 = 17{,}58$ cm/s

3.2 ENERGIA POTENCIAL GRAVITACIONAL

El cuerpo de la figura tiene una masa m y se mueve verticalmente por la acción de su propio peso (mg), desde el punto A hasta el punto B situado en el nivel de referencia (N.R):



El trabajo efectuado por el peso sobre el cuerpo es:

$W = F.h$
$W = m.g.h$

Expresión que representa la energía potencial gravitacional del cuerpo en el instante que tiene una altura h con respecto a un nivel arbitrario de referencia.

$$Ep_g = mgh \qquad \textbf{(3.2.1)}$$

Se define a la energía potencial gravitacional como la capacidad que tiene un cuerpo para producir trabajo en virtud de su posición .

No existe un nivel de referencia fijo para calcular la energía potencial gravitacional, razón por la cual podemos tomar cualquier nivel como referencia. Se considera que todos los niveles de referencia son horizontales.

El signo de la energía potencial y su valor absoluto dependen de la elección del nivel de referencia. Si el cuerpo se encuentra sobre el nivel de referencia, la energía potencial gravitacional es positiva. Si el cuerpo se encuentra bajo el nivel de referencia, la energía potencial gravitacional es negativa.

Se acostumbra elegir como nivel de referencia el nivel más bajo que aparezca, para evitar valores negativos.

De la ecuación (3.2.1) podemos concluir que:

- La energía potencial gravitacional es directamente proporcional a la masa del cuerpo.
- La energía potencial gravitacional es directamente proporcional a la posición del cuerpo, respecto a un nivel de referencia.

Unidades: la energía potencial gravitacional es una magnitud escalar cuyas unidades son las mismas del trabajo:

En el SI:
$$Ep_g = m.g.h$$
$$Ep_g = kg.m/s^2 . m$$
$$Ep_g = N . m$$
$$Ep_g = J$$

En el CGS:
$$Ep_g = m.g.h$$
$$Ep_g = g.cm/s^2 . Cm$$
$$Ep_g = dinas . cm$$
$$Ep_g = ergios$$

Dimensiones: las dimensiones de la energía potencial gravitacional son las del trabajo:

$$Ep_g = mgh$$
$$[Ep_g] = [MLT^{-2}\ L]$$
$$[Ep_g] = [ML^2\ T^{-2}]$$

Ejemplos:

1.- Desde 10m de altura respecto al piso de lanza un cuerpo de 200g con una velocidad de $(15\vec{j})$m/s. Calcular a los 2s:
   a) la altura que tiene el cuerpo respecto al piso
   b) la energía potencial gravitacional respecto al piso.

   a) $h = h_o + V_o.t - 1/2\ gt^2$
   $h = 10m + (15m/s)(2s) - 1/2\ (9,8m/s^2)(4s^2)$
   $h = 10m + 30m - 19,6m$
   $h = 20,4\ m$

b) $Ep_g = m.g.h$
$Ep_g = (0{,}2\ kg)(9{,}8\ m/s^2)(20{,}4m)$
$Ep_g = 39{,}98(J)$

2.- Una partícula de 150g posee una energía potencial gravitacional respecto al piso de $1{,}25 \times 10^7$ ergios. Determinar:
a) A qué altura sobre el nivel del suelo se encuentra la partícula
b) El tiempo que tarda la partícula en caer al suelo
c) Con qué rapidez choca contra el suelo

a) $Ep_g = m.g.h$

$$h = \frac{E_{pg}}{mg} = \frac{1{,}25 \times 10^7\ ergios}{150g.980cm/s^2}$$

$h = 85{,}03\ cm$

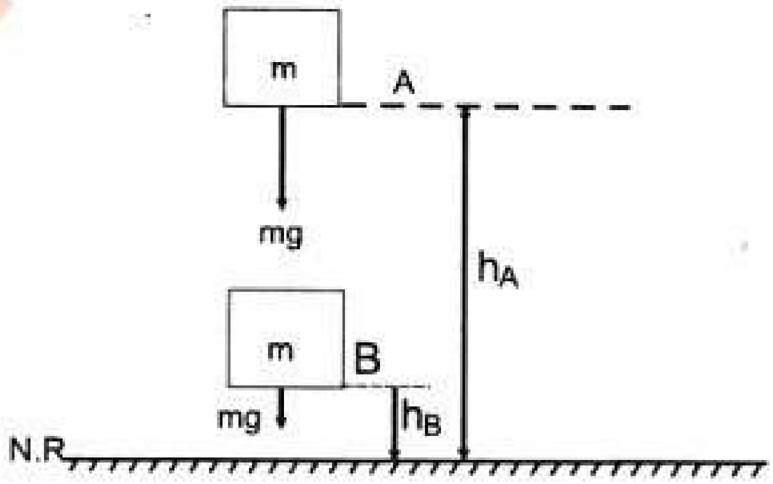
b) $h = V_o.t + 1/2g.t^2$

$$t^2 = \frac{2h}{g} = \frac{2(85{,}03\ cm)}{980\ cm/s^2}$$

$t = 0{,}42s$

c) $V = Vo + g.t$
$V = (980\ cm/s^2)(0{,}42s)$
$V = 408{,}2\ cm/s$

Variación de la Energía Potencial Gravitacional: el cuerpo de la figura tiene una masa m y se mueve verticalmente por acción de su propio peso (mg) desde el punto A hasta el punto B situado sobre el nivel de referencia (N.R.):



El trabajo efectuado por el peso sobre el cuerpo es:

$W_{A\rightarrow B} = F\,.\,\Delta h$

$W_{A\rightarrow B} = mg(h_A - h_B)$

$W_{A\rightarrow B} = mgh_A - mgh_B$

$W_{A\rightarrow B} = Ep_{gA} - Ep_{gB}$

$W_{A\rightarrow B} = -(Ep_gB - Ep_gA)$

$W_{A\rightarrow B} = -\Delta Ep_g$ **(3.2.2)**

Esto nos demuestra que el trabajo realizado por el peso sobre el cuerpo, es igual a la variación de la energía potencial gravitatoria tomada con signo negativo. De la ecuación (3.2.2) podemos concluir que:

- La energía potencial gravitatoria se comporta al contrario de la enrgía cinética.
- El trabajo realizado por el peso depende de la altura inicial y final y no de la trayectoria.
- Si $h_A > h_B$, la ΔEp_g es una cantidad positiva y el trabajo realizado por el peso también es positivo. Por consiguiente la energía potencial gravitatoria disminuye, el peso está a favor del movimiento (mov. Acelerado) y el cuerpo se acerca al N.R. (cuerpo moviéndose hacia abajo).
- Si $h_A < h_B$, la ΔEp_g es una cantidad negativa y el trabajo realizado por el peso también es negativo. Por consiguiente la energía potencial gravitatoria aumenta, el peso está en contra del movimiento (mov. Retardado) y el cuerpo se aleja del N.R. (cuerpo lanzado hacia arriba)
- Si $h_A = h_B$, la ΔEp_g es nula y el trabajo realizado por el peso también es nulo. Por consiguiente la energía potencial gravitatoria permanece constante y el cuerpo no tiene movimiento.

Ejemplos:

1.- Desde una altura de 15m se deja caer un cuerpo de 3kg. Calcular

a) la energía potencial gravitacional del cuerpo cuando pasa por un punto A situado a 10m del piso.

b) la energía potencial gravitacional del cuerpo cuando pasa por un punto B situado a 4m del piso.

c) El trabajo realizado por el peso del cuerpo para moverse desde A hasta B

a) $Ep_{gA} = mgh_A$
$Ep_{gA} = 3\,kg . 9{,}8 m/s^2 . 10m$
$Ep_{gB} = 294(J)$

b) $Ep_{gB} = mgh_B$
$Ep_{gB} = 3\,kg . 9{,}8\,m/s^2 . 4m$
$Ep_{gB} = 117.6\,(J)$

c) $W_{AB} = -\Delta Ep_g$
$W_{AB} = -(Ep_{gB} - Ep_{gA})$
$W_{AB} = -(117{,}6J - 294J)$
$W_{AB} = 176{,}4(J)$

2. En una central hidroeléctrica de 120m de altura, cada segundo cae un volumen de agua de $2875m^3$. Determinar:
   a) La energía potencial gravitacional que se genera por segundo
   b) La energía potencial gravitacional que tiene el agua al momento de llegar a las turbinas
   c) El trabajo que efectúa el agua al llegar a las turbinas
   d) La potencia desarrollada por la central hidroeléctrica
   e) Cuantos focos de 100w se pueden encender, si toda ésta energía se convierte en electricidad.

a) $m = 2875m^3 = 2{,}875 \times 10^6\,dm^3 = 2{,}875 \times 10^6\,kg$
$Ep_{go} = mgh_o$
$Ep_{go} = 2{,}875 \times 10^6 kg . 9{,}8\,m/s^2 . 120m$
$Ep_{go} = 3{,}381 \times 10^9\,(J)$

b) $Ep_g = mgh$
$Ep_g = 2{,}875 \times 10^6 kg . 9{,}8\,m/s^2 . 0\,m$
$Ep_g = 0(J)$

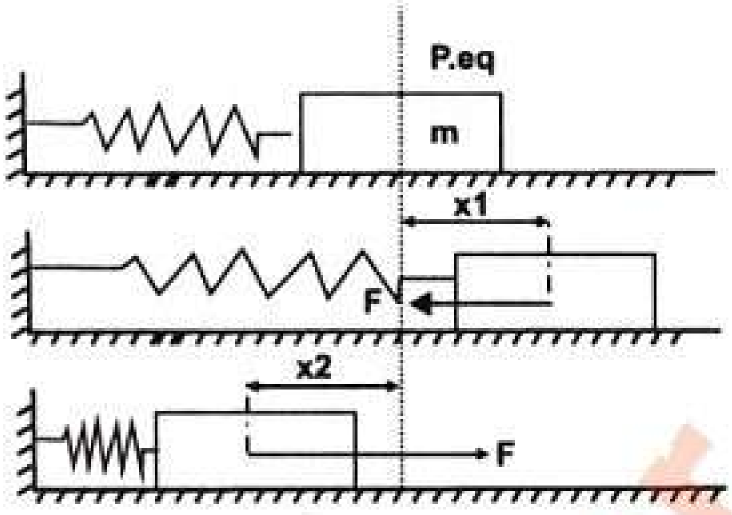
c) $W = -\Delta Ep_g$
$W = -(Ep_g - Ep_{go})$
$W = -(0J - 3{,}381 \times 10^9 J)$
$W = 3{,}381 \times 10^9\,(J)$

d) $P = \dfrac{W}{\Delta t} = \dfrac{3{,}381 \times 10^9 (J)}{1\,s} = 3{,}381 \times 10^9\,w$

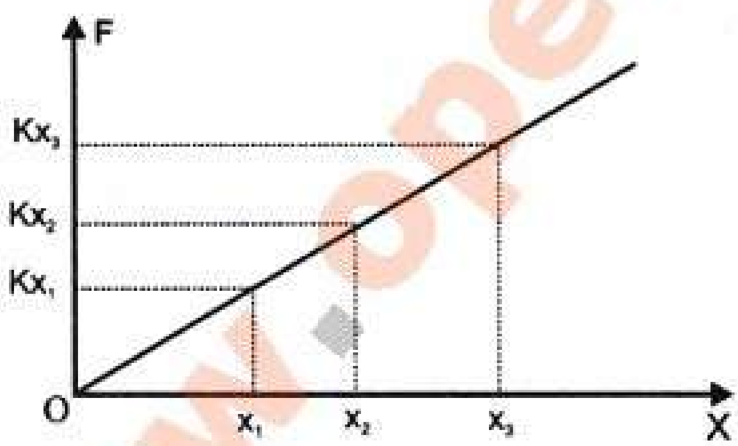
e) $n = \dfrac{3{,}381 \times 10^9 (w)}{100w} = 3{,}381 \times 10^7$ focos

3.3 ENERGIA POTENCIAL ELASTICA

El cuerpo de la figura tiene una masa m, esta inicialmente en reposo sobre una superficie horizontal sin rozamiento y está sujeta al extremo de un resorte que estiramos y dejamos en libertad.



Cuando el resorte está deformado (estirado o comprimido), aparece una fuerza elástica (F) que tiende a restablecer las dimensiones iniciales del mismo.
Esta fuerza elástica que surge al deformar un resorte, es directamente proporcional a la deformación y es de sentido contrario al desplazamiento (ley de Hooke)



$F \propto x$
$F = -kx$ **(3.3.1)**

En el gráfico fuerza- deformación de un resorte, k es una constante elástica positiva que depende de las características del resorte y cuyas dimensiones son $[FL^{-1}]$, x es la diferencia entre la longitud deformada y la longitud original del resorte.

Este es un caso de trabajo de fuerza variable, que gráficamente está representada por el área bajo la curva del diagrama fuerza- deformación:

$W = \frac{1}{2}(base)(altura)$
$W = \frac{1}{2}(x)(F)$
$W = \frac{1}{2}(x)(kx)$
$W = \frac{1}{2}kx^2$

Expresión que representa la energía potencial elástica adquirida por un resorte al deformarle (comprimirle o estirarle);

$Ep_e = \frac{1}{2} kx^2$ **(3.3.2)**

Se define a la energía potencial elástica, diciendo que es la capacidad que tiene un resorte para producir trabajo en virtud de su deformación.

De la ecuación (3.3.2) podemos concluir que;

- La energía potencial elástica es directamente proporcional a la constante elástica del resorte.
- La potencial elástica es directamente proporcional a la deformación al cuadrado.

Unidades: la energía potencial elástica es una magnitud escalar, cuyas unidades son las mismas del trabajo;

En el SI:
$Ep_e = 1/2\, kx^2$
$Ep_e = (N/m)m^2$
$Ep_e = N.m$
$Ep_e = J$

En el CGS:
$Ep_e = 1/2\, kx^2$
$Ep_e = (dina/cm)cm^2$
$Ep_e = dinas . cm$
$Ep_e = ergio$

Dimensiones: las dimensiones de la energía potencial elástica son las de trabajo:

$Ep_e = 1/2\, kx^2$
$[Ep_e] = [(F/L)L^2]$
$[Ep_e] = [M.L.T^{-2}.L]$
$[Ep_e] = [M.L^2.T^{-2}]$

Ejemplos:

1. Cuando a un resorte se le aplica una fuerza de 30(N), este se comprime 15 cm. Hallar:

 a) La constante elástica del resorte

 b) La energía potencial elástica acumulada por el resorte

 a) F = -kx

$$k = \frac{F}{x} = \frac{30\ (N)}{15\ cm} = 200N/m$$

b) $Ep_e = 1/2\, kx^2$

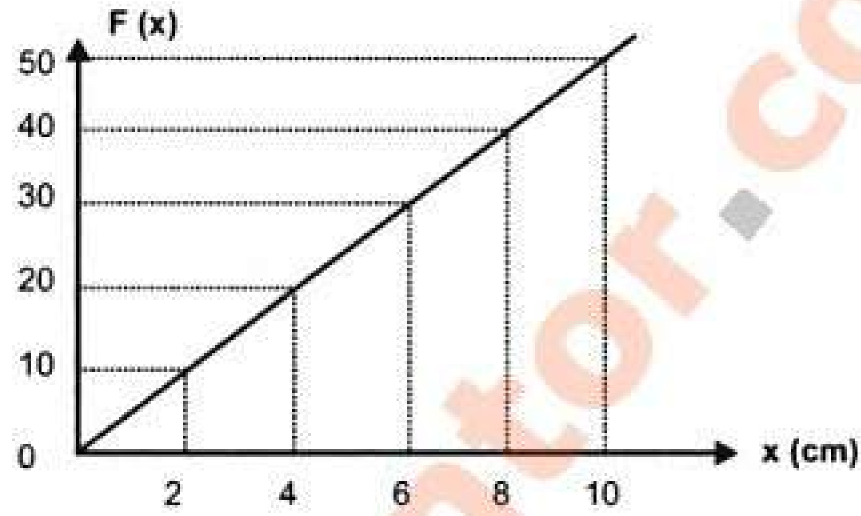
$Ep_e = 1/2\,(200N/m)(0{,}15m)^2$

$Ep_e = 2{,}25\ (J)$

2.- La gráfica de una fuerza variable (F) en función del desplazamiento (X) es: Hallar:

a) el valor de la constante elástica

b) la energía potencial elástica de la fuerza cuando el desplazamiento es 5 cm.



a) $F = -kx$

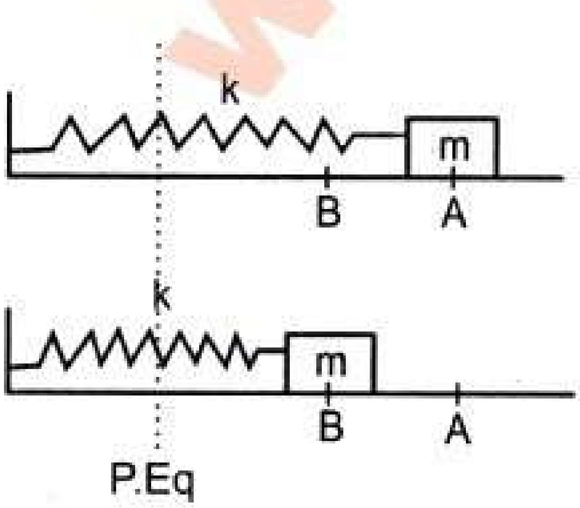
$$k = \frac{F}{x} = \frac{50\ (N)}{10\ cm} = \frac{50\ (N)}{0{,}1m} = 500N/m$$

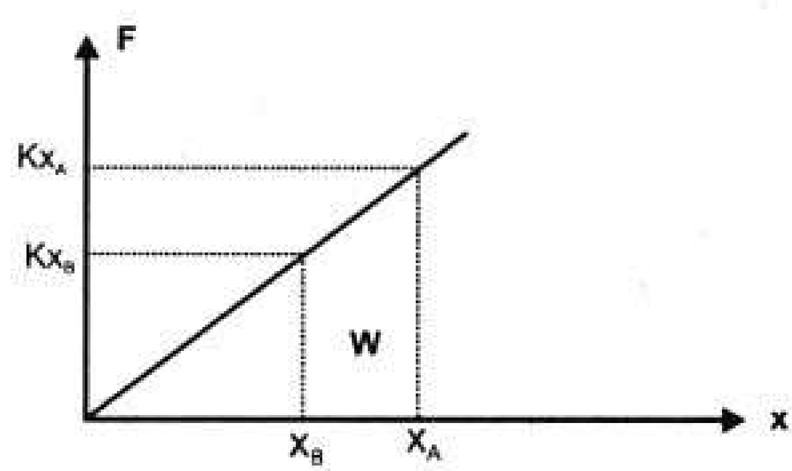
b) $Ep_e = 1/2\, kx^2$

$Ep_e = 1/2\,(500\ N/m)\,(0{,}05m)^2$

$Ep_e = 0{,}63\ (J)$

Variación de la energía potencial elástica: el cuerpo de la figura tiene una masa m, esta sobre una superficie sin rozamiento y sujeta al extremo de un resorte de constante elástica k.





Cuando se deforma el resorte desde un punto A hasta un punto B, por la acción de una fuerza variable F, el trabajo efectuado por la fuerza elástica es igual al área bajo la gráfica fuerza- desplazamiento;

$W_{A\rightarrow B} = 1/2\,(B+b)\,h;$ *por ser área de un trapecio*
$W_{A\rightarrow B} = 1/2(kx_A + kx_B)(x_A - x_B)$
$W_{A\rightarrow B} = 1/2k(x_A + x_B)(x_A - x_B)$
$W_{A\rightarrow B} = 1/2k(x^2_A - x^2_B)$
$W_{A\rightarrow B} = 1/2kx^2_A - 1/2kx^2_B$
$W_{A\rightarrow B} = Ep_{eA} - Ep_{eB}$
$W_{A\rightarrow B} = -(Ep_{eB} - Ep_{eA})$
$W_{A\rightarrow B} = -\Delta Ep_e$ **(3.3.3)**

Esto nos demuestra que el trabajo realizado por la fuerza elástica es igual a la variación de la energía potencial del resorte tomado con signo negativo.

De la Ecuación (3.3.3) podemos concluir que:

- La energía potencial se comporta al contrario de la energía cinética.
- El trabajo realizado por la fuerza elástica depende de los desplazamientos inicial y final, no depende de la forma de la trayectoria.
- Cuando el cuerpo se aleja de la posición de equilibrio, el trabajo de la fuerza elástica recuperadora es negativo y el sistema gana energía.
- Cuando el cuerpo se acerca a la posición de equilibrio, el trabajo de la fuerza elástica recuperadora es positivo y el sistema pierde energía.

Ejemplos:

1.- A un resorte de constante elástica 100N/m que tiene 80cm de longitud natural se le comprime 50 cm y se suelta. Determinar:

a) La ecuación de la fuerza variable
b) La energía potencial elástica cuando $X_1 = 40$cm
c) La energía potencial elástica cuando $X_2 = 10$cm
d) El trabajo de la fuerza elástica para llevar el resorte desde X_1 hasta X_2

a) $F = -Kx$
$F = -100x$

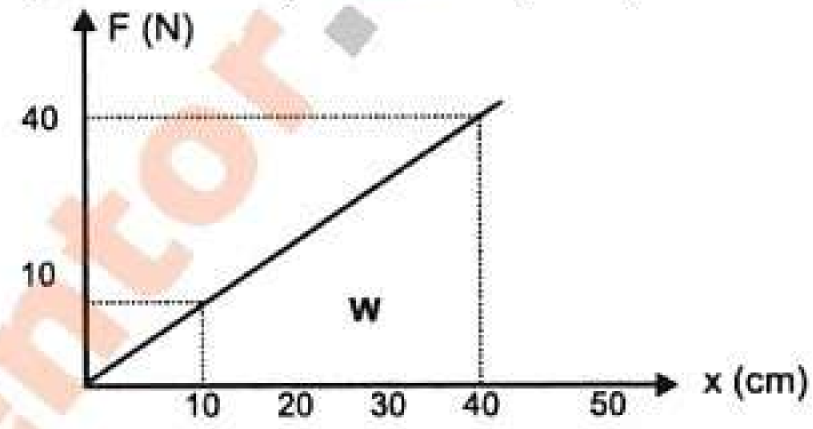
b) $Ep_{e1} = 1/2kx^2_1$
$Ep_{e1} = 1/2(100N/m)(0,4m)^2$
$Ep_{e1} = 8(J)$

c) $Ep_{e2} = 1/2kx^2_2$
$Ep_{e2} = ½(100N/m)(0,1m)^2$
$Ep_{e2} = 0.5\ (J)$

d) $W_{1-2} = -\Delta Ep_e$
$W_{1-2} = -(Ep_{e2} - Ep_{e1})$
$W_{1-2} = -(0,5J - 8J)$
$W_{1-2} = 7,5\ (J)$

2. Resolver el problema anterior gráficamente.
Trazamos la curva de la gráfica fuerza-desplazamiento, sabiendo que la pendiente es k= 100N/m:

$k = 100\ N/m$
$k = 1\ N/cm$



a) $F \propto x$
$F = -100x$

b) $Ep_{e1} = 1/2(base)(altura)$
$Ep_{e1} = 1/2(0,4m)(40N)$
$Ep_{e1} = 8(J)$

b) $Ep_{e2} = 1/2(base)(altura)$
$Ep_{e2} = 1/2(0,1m)(10N)$
$Ep_{e2} = 0,5\ (J)$

d) $W_{1-2} = 1/2\ (B + b)\ h$
$W_{1-2} = ½(40N + 10N)\ 0,3\ m$
$W_{1-2} = 7,5\ (J)$

3.4 CONSERVACIÓN DE LA ENERGIA

Energía Mecánica: la energía mecánica de un cuerpo en un punto dado, es la suma de las energías cinética y potencial:

$$E_M = Ec + Ep \qquad \textbf{(3.4.1)}$$

Energía Total: la energía total de un cuerpo en un punto dado, es la suma de todas las formas de energía que tiene el cuerpo:

$$E_T = E_{mecánica} + E_{eléctrica} + E_{nuclear} + \ldots \qquad \textbf{(3.4.2)}$$

La energía total de un sistema permanece constante durante cualquier proceso:

$$E_{To} = E_{Tf} = cte$$

Las diferentes formas de energía que tiene un cuerpo, pueden cambiar durante el proceso, pero la cantidad total de energía del sistema permanece constante.
Por ejemplo en una planta hidroeléctrica: la energía mecánica se transforma en energía eléctrica; en un vehiculo: la energía térmica se transforma en energía mecánica; en un taladro: la energía eléctrica se transforma en energía mecánica; en un calefactor: la energía eléctrica se transforma en energía calorífica; etc.

En todas estas transformaciones no hay creación, ni destrucción de energía, la cantidad total de energía que interviene permanece constante.

Este análisis nos lleva a concluir en una ley conocida como el Principio de Conservación de la Energía, que dice: *La energía no se crea, ni se destruye, únicamente se transforma.*

Fuerzas conservativas: son aquellas cuyo trabajo para mover una partícula entre dos puntos A y B, no depende de la trayectoria seguida por partícula, depende de la posición inicial (A) y final (B).

Por ejemplo cuando un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba y regresa a su posición inicial, la fuerza que actúa sobre el cuerpo es el peso dirigido hacia abajo. El trabajo realizado por esta fuerza (peso) cuando el cuerpo se mueve hacia arriba es $W_1 = -mgh$ y cuando se mueve hacia abajo es $W_2 = mgh$. El trabajo neto es la suma de los trabajos parciales y en este caso es cero.

El trabajo realizado por estas fuerzas en una trayectoria cerrada (ida y vuelta) es cero. Ejemplos de fuerzas conservativas son el peso del cuerpo, la fuerza elástica, la fuerza electrostática.

Fuerzas no conservativas (disipativas). Son aquellas cuyo trabajo para mover una partícula entre dos puntos A y B, depende de la trayectoria seguida por la partícula. Estas fuerzas pueden ser activas (a favor del movimiento) o resistivas (en contra del movimiento).

Cuando un cuerpo esta sometido a la acción de la fuerza de rozamiento, no se cumple el Principio de Conservación de la Energía Mecánica. Este no cumplimiento es aparente, porque el rozamiento de un cuerpo con otro produce el calentamiento de ambos cuerpos y existe un aumento en la energía interna de los cuerpos.

Por ejemplo si lanzamos un cuerpo hacia arriba de un plano inclinado con $\mu \neq 0$, veremos que el cuerpo avanza una distancia a lo largo de él, luego se detiene y posteriormente acelera hacia abajo, observando que la energía cinética del cuerpo al pasar por la posición inicial es menor que al comienzo del movimiento. Esto significa que el cuerpo pierde parte de su energía cinética, debido al trabajo negativo realizado por la fuerza de rozamiento, que actúa en sentido contrario al desplazamiento del cuerpo.

Sistemas conservativos (ideales): son aquellos sistemas en los cuales actúan solamente fuerzas conservativas ($\mu = 0$)

En este caso la energía mecánica del cuerpo en movimiento permanece constante en cualquier punto de su trayectoria:

$$E_M = cte. \qquad \textbf{(3.4.3)}$$

Esto significa que las diferentes formas de energía pueden cambiar durante el proceso, parte o totalidad de una de ellas se pueden transformar en otra u otras pero la cantidad total de energía mecánica del sistema permanece constante.

$E_{M_o} = E_{M_F}$, de donde **(3.4.4)**

$\Delta E_M = 0$

Sistemas no conservativos (reales): son aquellos sistemas en los cuales actúan fuerzas conservativas y disipativas.

En este caso la energía mecánica del cuerpo en movimiento no permanece constante

$$E_{M_o} \neq E_{M_F}$$

Esto significa que desaparece cierto tipo de energía, transformándose en otro tipo de energía(calor), en la cantidad equivalente a la energía desaparecida.

El trabajo realizado por fuerzas conservativas y no conservativas es:

$$W_{FNC} + W_{FC} = \Delta Ec \qquad \textbf{(3.4.5)}$$

El trabajo de las fuerzas conservativas puede expresarse como una disminución de la energía potencial del sistema:

$W_{FNC} - \Delta Ep = \Delta Ec$
$W_{FNC} = \Delta Ec + \Delta Ep$
$W_{FNC} = \Delta E_M$

Si la ΔE_M es positiva, la partícula aumenta su energía, porque hay un predominio de las fuerzas activas sobre las resistivas y si la ΔEm es negativa, la partícula pierde energía, porque hay un predominio de las fuerzas resistivas sobre las activas.

Ejemplos:

1.- Un móvil de 1200kg se mueve con una rapidez de 72km/h por una carretera recta donde μ=0.5 cuando el conductor aplica los frenos calcular:
a) La fuerza de rozamiento
b) El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento
c) Qué distancia recorre el móvil antes de detenerse?

a) $fr = \mu . N$
$fr = 0,5 . 1200\,kg . 9,8\,m/s^2$
$fr = 5880\,[N]$

b) $W = \Delta Ec$ $\qquad$ $V_o = 72km/h = 20m/s$
$W = Ec - Ec_o$
$W = 1/2 m V^2 - 1/2\, m V^2_o$

$$W = 1/2\, m\,(V^2 - V^2o)$$
$$W = ½ \,.\, 1200\,kg\,[-(20 m/s)^2]$$
$$W = -240\,000\,J$$

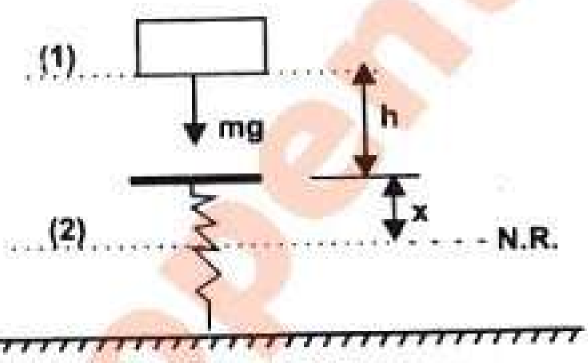
c) $W = -fr.d$

$$d = \frac{W}{fr} = \frac{-240000\ (J)}{-5880\ (N)}$$

$$d = 40{,}82\,m$$

2.- Un cuerpo de 3 kg cae desde 2,2 m de altura sobre un resorte cuya constante elástica es k = 2kgf/cm. Calcular la rapidez del cuerpo cuando el resorte se ha deformado 3 cm empleando:
a) La conservación de la energía
b) La ecuación trabajo - energía

a) $k = 2\ \frac{kgf}{cm} = 1960\ N/m$



$$E_{MO} = E_{MF}\ \text{(sistema conservativo)}$$
$$Ec_o + Ep_{go} + Ep_{e0} = Ec_F + Ep_{gF} + Ep_{eF}$$
$$mg(h+x) = ½\, mV^2 + 1/2kx^2$$
$$3kg\,.\,9{,}8m/s^2\,(2{,}2m + 0{,}03m) = 1/2\,.\,3\,kg.V^2 + 1/2\,.\,1960N/m(0{,}03m)^2$$
$$65{,}56(J) = 1{,}5kg\,.\,V^2 + 0{,}88\,(J)$$

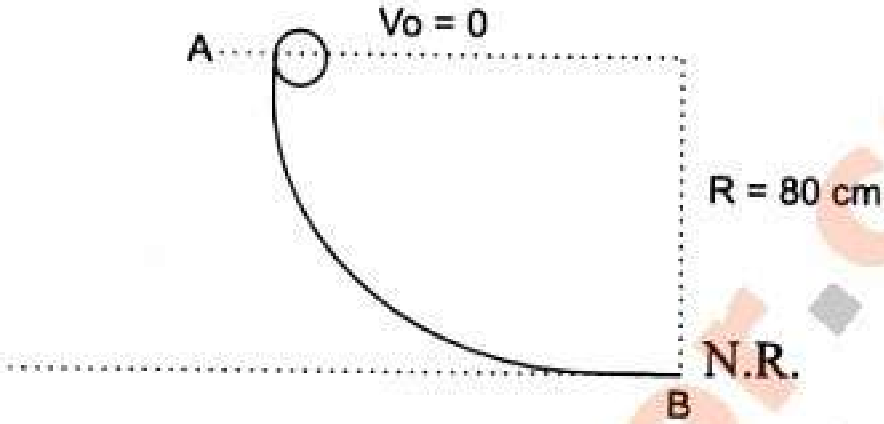
$$V^2 = \frac{65{,}56(J) - 0{,}88(J)}{1{,}5\ kg} = 43{,}12\,m^2/s^2$$

$$V = 6{,}57\,m/s$$

b) $W_{1-2} = \Delta Ec$
$$W_{1-2} = Ec_2 - Ec_1$$
$$mg(h+x) - 1/2\,kx^2 = 1/2\,mV^2$$
$$3kg.9{,}8m/s^2\,(2{,}2 + 0{,}03m) - 1/2\,.\,1960N/m\,(0{,}03m)^2 = 1/2\,.\,3\,kg.V^2$$
$$65{,}56(J) - 0{,}88(J) = 1{,}5\,kg.V^2; \qquad V = 6{,}57\,m/s$$

3.- Un cuerpo de 1kg desliza por la pista de la figura. Si la velocidad en el punto B es 2.5m/s calcular:

a) La energía potencial gravitacional en el punto A
b) La energía potencial gravitacional en el punto B
c) La energía cinética en el punto A
d) La energía cinética en el punto B
e) El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento que actúa sobre el cuerpo



a) $Ep_{gA} = mgh_A$
$Ep_{gA} = 1kg.9,8\ m/s^2.0,8m$
$Ep_{gA} = 7,48(J)$

b) $Ep_{gB} = mgh_B$
$Ep_{gB} = 1\ kg.9,8\ m/s^2.0m$
$Ep_{gB} = 0(J)$

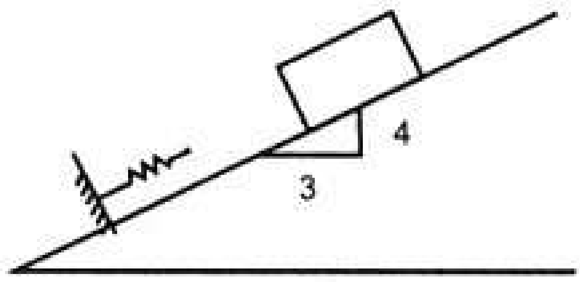
c) $Ec_A = 1/2m\,V^2_A$
$Ec_A = 1/2(1kg)(0)$
$Ec_A = 0$

d) $Ec_B = 1/2m\,V^2_B$
$Ec_B = ½(1kg)(2,5\ m/s)^2$
$Ec_B = 3,13\ (J)$

e) $W_{FNC} = \Delta E_M$
$W_{FNC} = E_{MB} - E_{MA}$
$W_{FNC} = Ec_B + Ep_{gB} + Ep_{eB} - Ec_A - Ep_{gA} - Ep_{eA}$
$W_{FNC} = 3,13\ (J) - 7,84\ (J)$
$W_{FNC} = -4,71\ (J)$

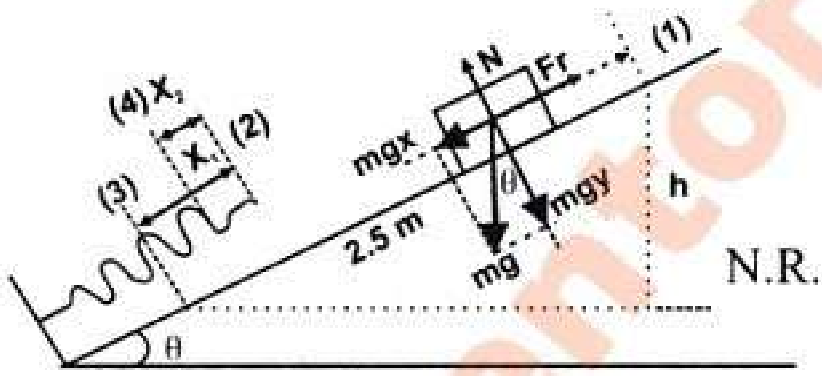
4.- Un cuerpo de 100kg se desliza hacia abajo por el plano inclinado de la figura. Parte del reposo y después de recorrer 2.5 m choca con un resorte de constante elástica k = 500kgf/m. Si μ = 0.25 determinar la máxima deformación del resorte y la velocidad máxima del cuerpo:

a) Empleando la conservación de la energía
b) Empleando la ecuación del trabajo-energía



$k = 500kgf/m = 500kgf/m(9{,}8m/s^2) = 4900N/m$
$tg\,\theta = 4/3 \Rightarrow \theta = 53{,}13°$

$$sen\,\theta = \frac{h}{2{,}5 + x_1} \Rightarrow h = (2{,}5m + x_1)\,sen\,\theta$$



a) La máxima deformación del resorte es:

$W_{FNC} = \Delta E_M$ (sistema no conservativo) $\qquad \Sigma Fy = 0$
$-fr.d = E_{M3} - E_{M1} \qquad N = mg.\cos\theta$
$-\mu.N(2{,}5m + X_1) = E_{c3} + Ep_{g3} + Ep_{e3} - Ec_1 - Ep_{g1} - Ep_{e1}$
$-\mu.N\,(2{,}5m + X_1) = 1/2kx_1^2 - mgh$
$-\mu.mg.\cos\theta(2{,}5m + X_1) = 1/2kx_1^2 - mg(2{,}5m + X_1)sen\theta$
$1/2kx_1^2 + \mu mg\cos\theta.X_1 + \mu mg\cos\theta.2{,}5m - mgsen\theta.2{,}5m - mgsen\theta.X_1 = 0$
$2450\,x_1^2\,(N/m) + 147\,x_1\,(N) - 784\,x_1\,(N) + 367{,}5J - 1960J = 0$
$2450\,x_1^2\,(N/m) - 637\,x_1\,(N) - 1592\,(J) = 0$
$x_1 = 0{,}95m$

En el cuerpo se hace un trabajo positivo hasta cuando la fuerza neta es cero, después de esto el trabajo negativo va frenando el cuerpo.
El cuerpo alcanza su velocidad máxima cuando la aceleración del cuerpo es nula y por tanto la fuerza neta sobre él es cero.

La deformación del resorte para ésta posición es.

$\Sigma Fx = 0$

$mg.sen\theta - fr - fe = 0$

$mg \, . \, sen\theta - \mu.mg.cos\theta - kx_2 = 0$

$100 \, kg.9{,}8 \, m/s^2 \, . \, sen\theta - 0{,}25 \, . \, 100kg.9{,}8 \, m/s^2.cos\theta = 4900N/m.x_2$

$$x_2 = \frac{784(N) - 147\,(N)}{4900\;N/m}$$

$x_2 = 0{,}13m$

La velocidad máxima del cuerpo es:

$W_{FNC} = \Delta E_M$(sistema no conservativo)

$-fr.d = E_{M4} - E_{M1}$

$-\mu.mgcos\theta\,(2{,}5m + 0{,}13) = E_{c4} + Ep_{g4} + Ep_{e4} - Ec_1 - Ep_{g1} - Ep_{e1}$

$-386{,}61\,(J) = 1/2mV^2_4 + 1/2kx^2_2 - mgh$

$-386{,}61\,(J) = 50\,kg.V^2_4 + 1/2(4900N/m)(0{,}13m)^2 -$

$100\,kg.9{,}8m/s^2\,(2{,}5m + 0{,}13m).\,sen\theta$

$50kg.V^2_4 = 2061{,}92(J) - 386{,}61(J) - 41{,}41\,(J)$

$$V^2_4 = \frac{1633,\,90(J)}{50\;kg}$$

$V_4 = 5{,}72\,m/s$

b) La máxima deformación del resorte es:

$W_{1\text{-}3} = \Delta E_c$

$(mg.sen\theta - fr)(2{,}5m + x_1) + W_{FNC} = Ec_3 - Ec_1$

$(mg.sen\theta - \mu.mg.cos\theta)(2{,}5m + x_1) - 1/2kx^2_1 = 0;$ por ecuación (3.4.5)

$[784(N) - 147(N)](2{,}5m + x_1) - 1/2\,(4900N/m)x^2_1 = 0$

$2450x^2_1\,(N/m) - 637\,x_1(N) - 1592{,}5(J) = 0$

$x_1 = 0{,}95\,m$

La velocidad máxima del cuerpo es:

$$W_{1\text{-}4} = \Delta E_c$$

$$(mg.sen\theta - fr)(2{,}5m + 0{,}13m) + W_{FNC} = Ec_4 - Ec_1$$

$$(mg.sen\theta - \mu.mg.cos\theta)\,.\,2{,}63m - 1/2kx^2_2 = 1/2mV^2_4$$

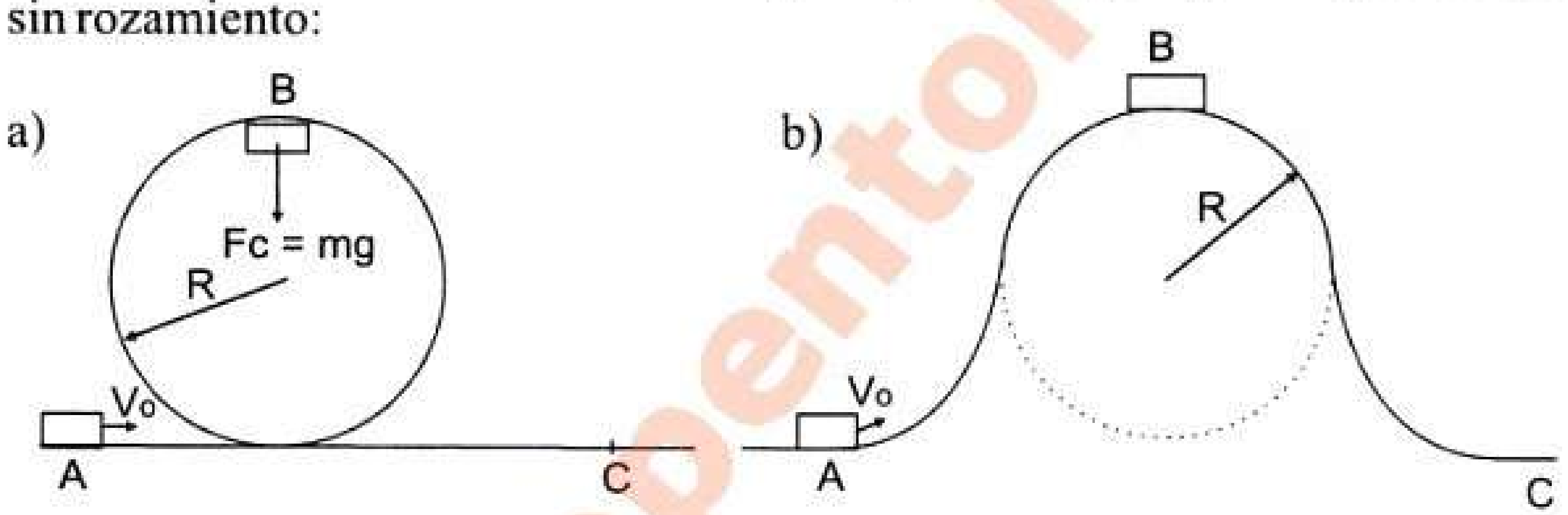
$$[784(N) - 147(N)].\,2{,}63m - 1/2(4900N/m)(0{,}13m)^2 = 1/2\,.\,100\,kg.V^2_4$$

$$1675{,}31(J) - 41{,}1(J) = 50\,kg.V^2_4$$

$$V^2_4 = \frac{1633{,}91\ (J)}{50\ kg}$$

$$V_4 = 5{,}72\ m/s$$

5.- Encontrar la velocidad inicial mínima para que el cuerpo siga la trayectoria ABC sin rozamiento:



a) $Fc = mg$

$$\frac{mV^2_B}{R} = mg$$

$$V^2_B = gR \qquad \textbf{(1)}$$

$$E_{MA} = E_{MB}$$

$$E_{CA} + Ep_{gA} = Ec_B + Ep_{gB}$$

$$1/2mV^2_0 = 1/2mV^2_B + 2mgR$$

$$V^2_0 = V^2_B + 4gR$$

$$V^2_B = V^2_0 - 4gR \qquad \textbf{(2)}$$

Igualando (1) y (2):

$$gR = V^2_0 - 4\,gR$$

$$V^2_0 = 5gR$$

$$V_o = \sqrt{5gR}$$

b) $E_{MA} = E_{MB}$

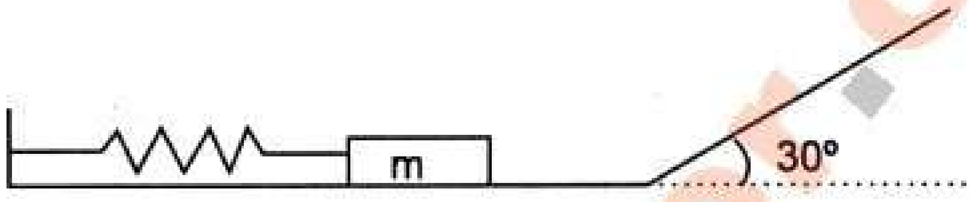
$Ec_A + Ep_{gA} = Ec_B + Ep_{gB}$

$1/2\, mV_0^2 = 2mgR$

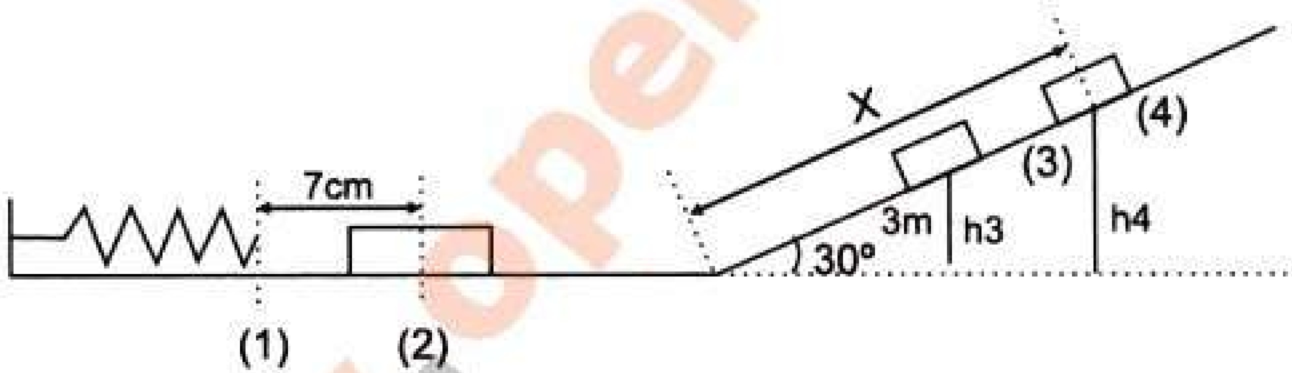
$V_0^2 = 4gR$

$V_o = \sqrt{4gR}$

6.- Junto al resorte de la figura de constante elástica 20000N/m se coloca un cuerpo de 2.5 kg, se comprime el resorte 7cm y se suelta el cuerpo Si u = 0, calcular;



a) La rapidez que tiene el cuerpo en el plano horizontal
b) La rapidez que tiene el cuerpo cuando asciende 3m en el plano inclinado
c) La distancia que recorre el cuerpo en el plano inclinado hasta detenerse



a) $E_{M1} = E_{M2}$ (sistema conservativo)

$Ec_1 + Ep_{g1} + Ep_{e1} = Ec_2 + Ep_{g2} + Ep_{e2}$

$1/2kx^2 = 1/2mV_2^2$

$$V_2^2 = \frac{kx^2}{m} = \frac{20000N/m(0,07m)^2}{2,5\ kg}$$

$V_2 = 6,26$ m/s

b) $E_{M2} = E_{M3}$ (sistema conservativo)
$Ec_2 + Ep_{g2} + Ep_{e2} = Ec_3 + Ep_{g3} + Ep_{e3}$
$\frac{1}{2}mV^2_2 = \frac{1}{2}mV^2_3 + mgh_3$
$V^2_3 = V^2_2 - 2gh_3$
$V^2_3 = (6{,}26\ m/s)^2 - 2.\ 9{,}8\ m/s^2 .\ 1{,}5\ m$
$V_3 = 3{,}13\ m/s$

$h_3 = 3m.sen30^o$
$h_3 = 1.5m$

c) $E_{M2} = E_{M4}$ (sistema conservativo)
$Ec_2 + Ep_{g2} + Ep_{e2} = Ec_4 + Ep_{g4} + Ep_{e4}$
$\frac{1}{2}mV^2_2 = mgh_4$

$$h_4 = \frac{V_2^2}{2g} = \frac{(6{,}26\ m/s)^2}{2.\ 9{,}8\ m/s^2}$$

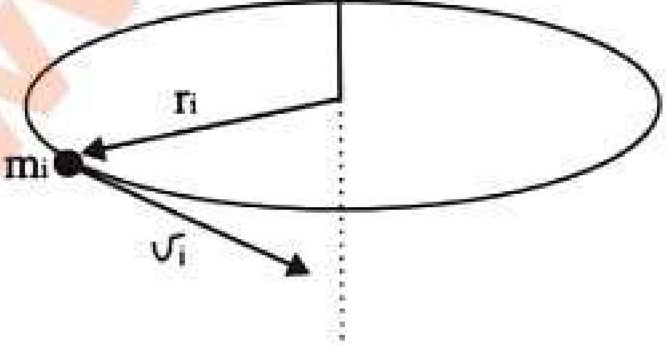
$h_4 = 2m$
$Sen30^o = h_4/x$

$$x = \frac{h_4}{sen30^o} = \frac{2m}{sen30^o}$$

$x = 4m$

3.5 ENERGIA CINETICA DE ROTACIÓN

Una partícula de masa m_i realiza un giro de radio r_i alrededor de su eje, como indica la figura:



Si la velocidad tangencial es V_i, la energía cinética de la partícula es:
$Ec_i = \frac{1}{2}m_i . V^2_i$, como $V_i = \omega . r_i$
$Ec_i = \frac{1}{2}m_i . (\omega . r_i)^2$
$Ec_i = \frac{1}{2}m_i . r^2_i \omega^2$

La energía cinética total de rotación del cuerpo es la suma de las energías cinéticas de todas partículas:

$Ec = \Sigma Ec_i$
$Eci = \Sigma \frac{1}{2} m_i . r_i^2 \omega^2$, pero $mr^2 = I$ por (1.1.1)
$Ec = \frac{1}{2} I\omega^2$

Expresión que representa la energía cinética de rotación del cuerpo en el instante que tiene una velocidad angular ω.

$$Ec_r = \frac{1}{2} I\omega^2 \qquad \textbf{(3.5.1)}$$

Se define a la energía cinética de rotación, diciendo que es la capacidad que tiene un cuerpo para realizar trabajo en virtud de su velocidad angular ω.

De la ecuación (3.5.1) podemos concluir que:

- La energía cinética de rotación es directamente proporcional al momento de inercia del cuerpo
- La energía cinética de rotación es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad angular.

Unidades: la energía cinética de rotación es una magnitud escalar, cuyas unidades son las mismas del trabajo.

En el SI: $Ec_r = \frac{1}{2} I\omega^2$
$Ec_r = kg.m^2 . (rad/s)^2$
$Ec_r = (kg.m/s^2)\, m$
$Ec_r = N.m$
$Ec_r = J$

En el CGS: $Ec_r = \frac{1}{2} I\omega^2$
$Ec_r = g.cm^2 . (rad/s)^2$
$Ec_r = (g.cm/s^2) cm$
$Ec_r = dina.cm$
$Ec_r = ergio$

Dimensiones. Las dimensiones de la energía cinética de rotación son las de trabajo:

$Ec_r \ = \frac{1}{2}I\omega^2$
$[Ec_r] = [ML^2 1/T^2]$
$[Ec_r] = [ML^2 T^{-2}]$

El movimiento de un cuerpo rígido puede considerarse como una combinación una traslación y una rotación. En éste caso la energía cinética del cuerpo es:

$Ec = Ec_{traslación}$ y $Ec_{rotación}$ **(3.5.2)**
$Ec = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$

Si el cuerpo tiene solamente movimiento de traslación $\omega = 0$ y la energía cinética se reduce a $\frac{1}{2}$ m V^2. si el cuerpo tiene solamente movimiento de rotación, V=0 y la energía cinética se reduce a $\frac{1}{2}I\omega^2$

Si las fuerzas aplicadas sobre los cuerpos rígidos son conservativas (peso del cuerpo, fuerza elástica, etc) la energía mecánica del cuerpo es:

$E_M = Ec + Ep = cte$
$E_M = Ec_{traslación} + Ec_{rotación} + Ep_{gravitatoria} = cte$
$E_M = \frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}\ I\omega^2 + mgh = cte$ **(3.5.3)**

Si algunas de las fuerzas aplicadas sobre el cuerpo rígido no son conservativas (rozamiento, etc) la energía del cuerpo es:

$W_{FNC} = \Delta E_M$ de (3.4.6)

Ejemplos:

1.- Una varilla de 5kg y de 2,4m de largo gira alrededor de un eje vertical que pasa por un extremo. Si aumenta su velocidad de 10rpm a 40rpm, hallar:
a) El momento de inercia de la varilla respecto a su eje
b) La energía cinética inicial de sólido en rotación
c) La energía cinética final del sólido en rotación
d) El trabajo realizado.

$\omega_o = 10\,\text{rpm} = 10 . \dfrac{2\pi rad}{60\ s} = 1{,}05\,\text{rad/s}$

$\omega = 40\,\text{rpm} = 40 . \dfrac{2\pi rad}{60\ s} = 4{,}19\,\text{rad/s}$

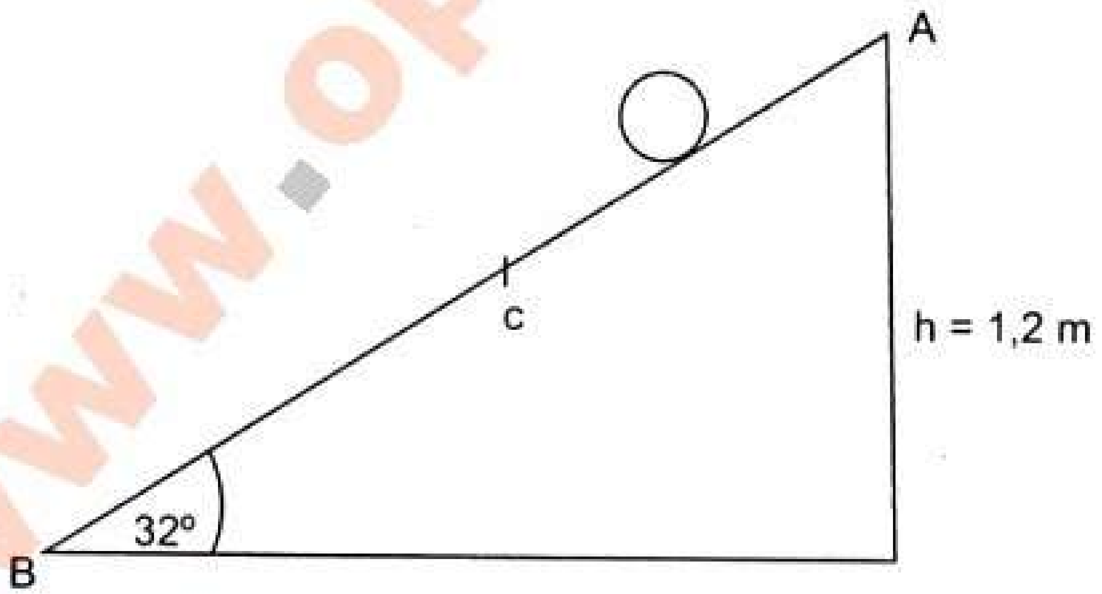
a) $I = 1/3\,ML^2 = 1/3\,(5kg)(2{,}4m)^2$
$I = 9{,}6\,kg\,.\,m^2$

b) $Ec_{ro} = \frac{1}{2} I\omega_o^2 = \frac{1}{2}(9{,}6\,kg.m^2)(1{,}05 rad/s)^2$
$Ec_{ro} = 5{,}29\,(J)$

c) $Ec_r = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{1}{2}(9{,}6\,kg.m^2)(4{,}19 rad/s)^2$
$Ec_r = 84{,}27\,(J)$

d) $W = \Delta Ec$
$W = Ec_r - Ec_{ro}$
$W = 84{,}27\,(J) - 5{,}29\,(J)$
$W = 78{,}98\,(J)$

2.- Por el plano inclinado de la figura ($\mu = 0$) rueda un cuerpo rígido homogéneo. Si parte del reposo en el punto A, determinar empleando la conservación de la energía y la ecuación trabajo- energía [a) y c)]:



a) La rapidez del cuerpo en cualquier punto del plano cuando baja rodando.
b) Las características de éste movimiento
c) La rapidez del cuerpo en cualquier punto del plano, si bajaría resbalando
d) Las características de éste movimiento
e) La rapidez de una esfera en el punto B (R = 20cm)

f) La rapidez de un disco en el punto B (R= 20cm)
g) La rapidez de un aro en el punto B(R= 2cm)
Utilizando la conservación de la energía:

a) $E_{M_A} = E_{M_C}$

$Ec_{tA} + Ec_{rA} + Ep_{gA} = Ec_{tC} + Ec_{rC} + Ep_{gC}$

$mgh_A = \frac{1}{2}mV_c^2 + \frac{1}{2} I\,\omega^2 + mgh_C$, como $I = mR_G^2$ y $\omega = V/R$

Cuando el cuerpo rueda sobre el plano inclinado, la energía potencial inicial se transforma en energía cinética de traslación y rotación, por lo que el movimiento de rotación hace que el movimiento de traslación sea más lento.

$$mgh_A = \frac{1}{2}m V_c^2 + \frac{1}{2} mR_G^2 \cdot \frac{V_c^2}{R^2} + mgh_C$$

$$2gh_A = V_c^2 (1 + R_G^2/R^2) + 2gh_c$$

$$V_C^2 = \frac{2g(h_A - h_c)}{1 + R_G^2 / R^2}$$

b) La rapidez de un cuerpo que desciende rodando por un plano inclinado.
- No depende de la masa del cuerpo
- No depende de las dimensiones del cuerpo
- Depende de la forma del cuerpo
- Depende de la altura inicial y final.

c) $E_{M_A} = E_{M_C}$

$Ec_{tA} + Ec_{rA} + Ep_{gA} = Ec_{rC} + Ec_{rC} + Ep_{gC}$

$mgh_A = \frac{1}{2}mV_c^2 + mgh_C$

Cuando el cuerpo *resbala* sobre el plano inclinado, la energía potencial inicial se transforma solamente en energía cinética de traslación.

$2gh_A = Vc^2 + 2ghc$

$Vc^2 = 2g\,(h_A - h_c)$

d) La rapidez de un cuerpo que desciende resbalando por un plano inclinado:
- No depende de la masa del cuerpo
- No depende de las dimensiones del cuerpo
- No depende de la forma del cuerpo
- Depende solamente de la altura inicial y final

e) Del cuadro de las pág. 6 y 9, el radio de giro de la esfera es:

$R^2_G = \frac{Io}{m} = \frac{2/5mR^2}{m} = \frac{2}{5}$ R^2 y la rapidez en B es:

$$V^2_B = \frac{2g(h_A - h_B)}{1 + \frac{2/5\,R^2}{R^2}} = \frac{2g(h_A - h_B)}{7/5} = \frac{10}{7}\,gh_A$$

$$V^2_B = \frac{10}{7}(9{,}8\ m/s^2)(1{,}2m)$$

$$V_B = 4{,}10\ m/s$$

f) Del cuadro de la pág. 6, el radio de giro del disco es:

$R^2_G = \frac{I_o}{m} = \frac{1/2mR^2}{m} = \frac{1}{2}$ R^2 y la rapidez en B es:

$$V^2_B = \frac{2g(h_A - h_B)}{1 + \frac{1/2\,R^2}{R^2}} = \frac{2g(h_A - h_B)}{3/2} = \frac{4}{3}\,gh_A$$

$$V^2_B = \frac{4}{3}(9{,}8\ m/s^2)(1{,}2m)$$

$$V_B = 3{,}96\ m/s$$

g) Del cuadro de la pág. 6, el radio de giro del aro es:

$$R^2_G = \frac{Io}{m} = \frac{mR^2}{m} = R^2$$ y la rapidez en B es:

$$V^2_B = \frac{2g(h_A - h_B)}{1 + \frac{R^2}{R^2}} = \frac{2g(h_A - h_B)}{2} = gh_A$$

$$V^2_B = 9{,}8\ m/s^2 (1{,}2m)$$

$$V_B = 3{,}43\ m/s$$

Utilizando la ecuación trabajo- energía:

a) $W_{A \to C} = \Delta Ec$

$$W_{A \to C} = Ec_C - Ec_A$$

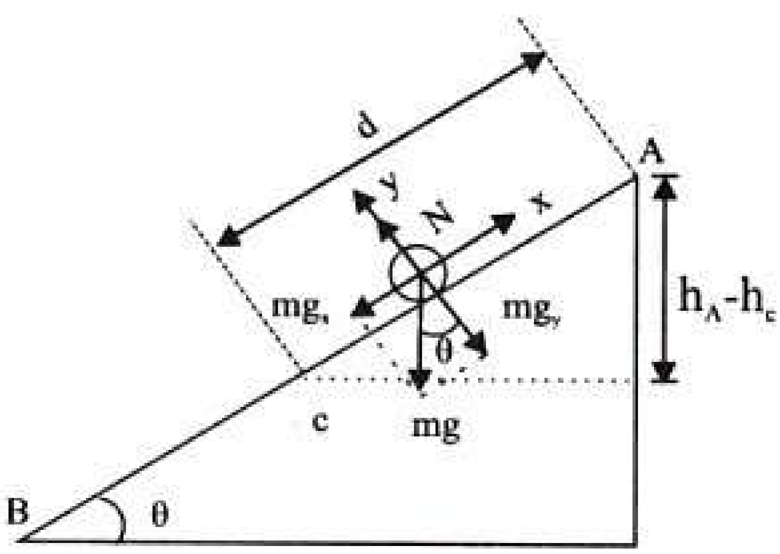
$$(mg.sen\theta)d = \tfrac{1}{2} mVc^2 + \tfrac{1}{2} I\omega^2$$

$$mg.sen\theta. \frac{(h_A - h_B)}{sen\ \theta} = \tfrac{1}{2} mVc^2 + \tfrac{1}{2} mR^2_G \ \frac{Vc^2}{R^2}$$

$$2g(h_A - h_C) = V^2c + \frac{R^2_G.\ V^2c}{R^2}$$

$$2g(h_A - h_C) = V^2c(1 + R_G{}^2/R^2)$$

$$V^2c = \frac{2g(h_A - h_C)}{1 + \frac{R_G{}^2}{R^2}}$$



c) $W_{A\to C} = \Delta Ec$

$W_{A\to C} = Ec_C - Ec_A$

$(mg.sen\theta)d = \frac{1}{2} mV_C^2$

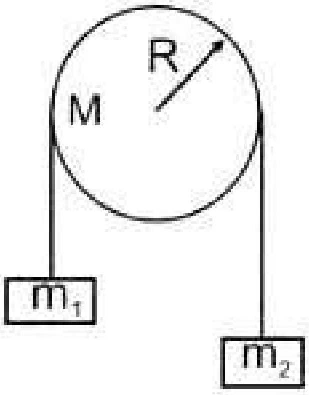
$2g.sen\theta \cdot \dfrac{h_A - h_C}{sen\theta} = V_C^2$

$V_C^2 = 2g(h_A - h_C)$

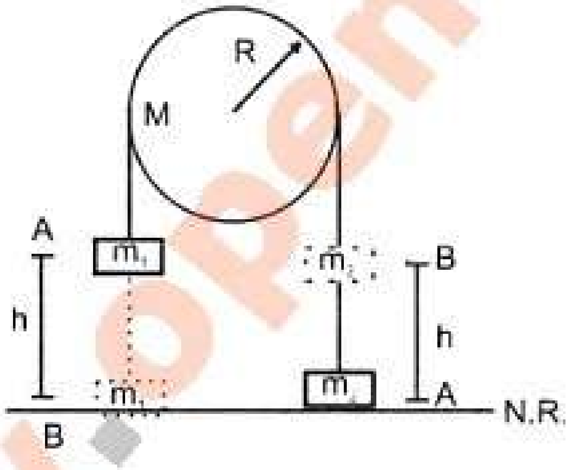
$sen\theta = \dfrac{h_A - h_C}{d}$

$d = \dfrac{h_A - h_C}{sen\theta}$

3.- Un cilindro macizo y homogénco de 100 kg y 0.5m de radio que puede girar sin rozamiento alrededor de un eje horizontal, lleva enrollada una cuerda de cuyos extremos están sujetos dos cuerpos de 20kg y 15 kg respectivamente. Si el sistema se deja en libertad, hallar a los 8s de haberse iniciado el movimiento:
a) La rapidez lineal
b) La velocidad angular



a)



$EM_{\text{sistema en A}} = EM_{\text{sistema en B}}$

$EM_{\text{cuerpos A}} + EM_{\text{cilindro A}} = EM_{\text{cuerpos B}} + EM_{\text{cilindro B}}$

$EM_{1A} + EM_{2A} = EM_{1B} + EM_{2B} + Ec_T$

$Ec_{1A} + Ep_{1A} + Ec_{2A} + Ep_{2A} = Ec_{1B} + Ep_{1B} + Ec_{2B} + Ep_{2B} + Ec_T$

$m_1gh = \frac{1}{2} m_1V^2 + \frac{1}{2} m_2V^2 + m_2gh + \frac{1}{2}I\omega^2$

Pero $h = \frac{1}{2} a . \Delta t^2$, $I = \frac{1}{2} MR^2$ y $\omega = V/R$, entonces:

$$m_1 g(\tfrac{1}{2}a.\Delta t^2) = \tfrac{1}{2}m_1 V^2 + \tfrac{1}{2}m_2 V^2 + m_2 g(\tfrac{1}{2}a.\Delta t^2) + \tfrac{1}{2}(1/2MR^2)V^2/R^2$$

Dividiendo por ½ V:

$$m_1 g\Delta t = m_1 V + m_2 V + m_2 g\Delta t + \tfrac{1}{2}MV$$
$$m_1 g\Delta t - m_2 g\Delta t = V(m_1 + m_2 + 1/2M)$$

$$V = \frac{g.\Delta t\,(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} = \frac{9{,}8\ m/s^2 .\ 8s(20kg - 15\ kg)}{20\ kg + 15kg + 50\ kg}$$

$V = 4{,}61$ m/s

b) $\omega = \dfrac{V}{R} = \dfrac{4{,}61\ m/s}{0{,}5\ m} = 9{,}22\ rad/s^2$

3.6 EJERCICIO No. 6

1.- Se impulsa un cuerpo de 75kg con una velocidad de $10\vec{i}$ m/s sobre un plano horizontal. Si desliza 18m antes de pararse, calcular:
a) La energía cinética inicial
b) La energía cinética final
c) El coeficiente de rozamiento

2.- Sobre una superficie horizontal ($\mu = 0$) se impulsa un cuerpo de 0.8kg con una rapidez de 7m/s contra un resorte de constante elástica k= 350 N/m. Hallar:
a) La energía cinética del cuerpo
b) La deformación del resorte

3.- Se lanza un cuerpo de 5kg con una velocidad de $(25\vec{j})$m/s. Calcular:
a) La energía cinética, potencial y total iniciales
b) La energía cinética, potencial y total a los 4 s de haber sido lanzado el cuerpo
c) La energía cinética, potencial y total cuando el cuerpo está a 15 m de altura.

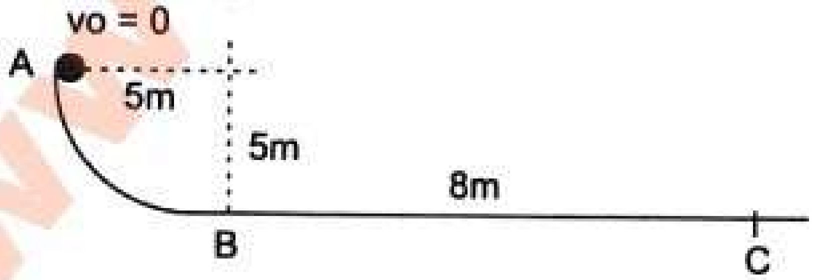
4.- Un volante de 30kg y 20 cm de radio, gira a razón de 192 rpm. Suponiendo que todo el material está localizado en su aro, determinar:
a) Su velocidad angular
b) El momento de inercia de la rueda
c) Su energía cinética de rotación

5.- Se lanza un cuerpo de 0.2kg hasta una altura de 12 m, calcular:
a) La energía potencial gravitacional que tiene el cuerpo a esa altura.
b) Con que rapidez fue lanzado el cuerpo para que llegue a esa altura
c) Con que rapidez llegará el cuerpo nuevamente al suelo

6.- Se suelta una bomba de 500 kg desde un avión que vuela a $(700\vec{i})$ km/h y 2000 metros de altura. Calcular:
a) La energía cinética, potencial y total iniciales
b) La velocidad de la bomba al llegar al suelo
c) La energía cinética, potencial y total a los 15 s de haber sido lanzada

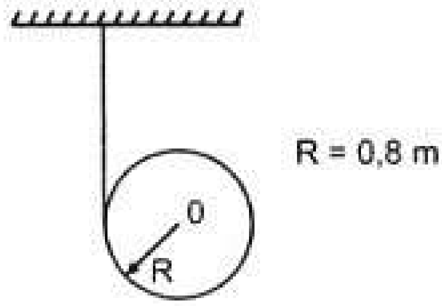
7.- Sobre una mesa de 1.2m de altura se comprime un resorte de constante elástica k = 280 N/m. En el extremo libre del resorte se coloca un cuerpo de 40g y se suelta. El cuerpo se desliza sobre la mesa (μ= 0) y cae al suelo con una rapidez de 10m/s, Calcular :
a) Cuánto se comprimió el resorte
b) Con que rapidez abandona la mesa el cuerpo

8.- Un cuerpo de 2kg desliza por la pista de la figura. Si la rapidez en el punto B es 9 m/s. Calcular:

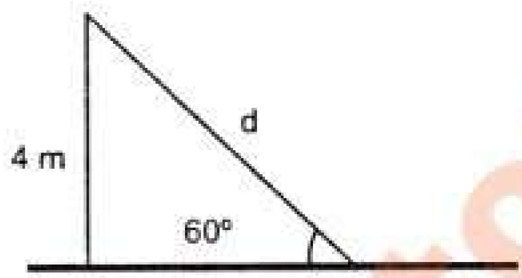


a) La energía cinética y potencial gravitacional en el punto A
b) La energía cinética y potencial gravitacional en el punto B
c) El trabajo realizado por la fuerza de rozamiento
d) El coeficiente de rozamiento del plano horizontal, si el cuerpo se detiene en C

9.- En un cilindro macizo y homogéneo de 50kg se enrolla una cuerda como indica la figura. Calcular la rapidez del centro O cuando ha descendido 2,8 m desde la posición de reposo.

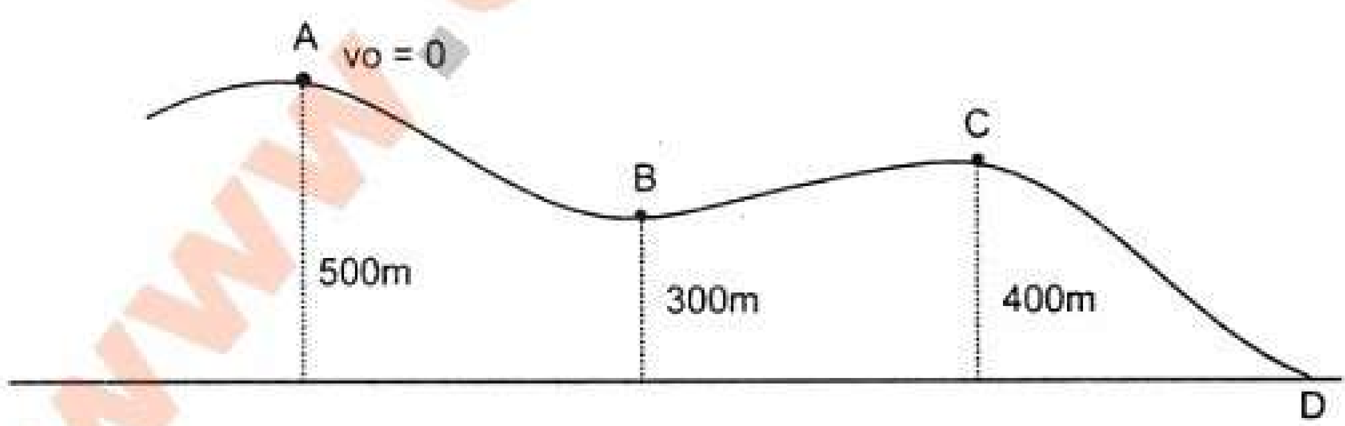


10.- Se suelta un cuerpo de 10kg por el tobogán de la figura con $\mu=0$. Determinar:



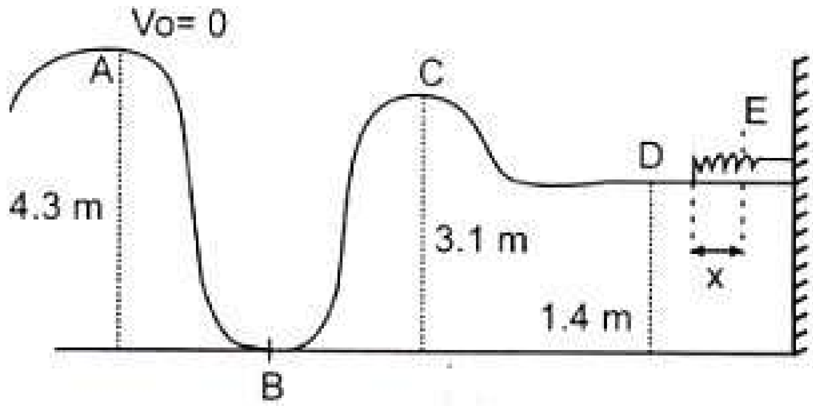
a) La energía mecánica inicial
b) Con qué rapidez sale el cuerpo del tobogán
c) La aceleración del cuerpo a final de la caída.

11.- La figura muestra la trayectoria seguida por un esquiador de 70 kg durante una competencia. Calcular:



a) La disminución de energía potencial gravitacional del esquiador en el tramo AB
b) La energía cinética en B
c) El aumento de energía potencial gravitacional en el tramo BC
d) La energía cinética en C y D
e) Si la energía cinética del esquiador al pasar por el punto D fuera de $5x10^4$ J, cuánta energía se ha transformado en energía térmica por causa del rozamiento

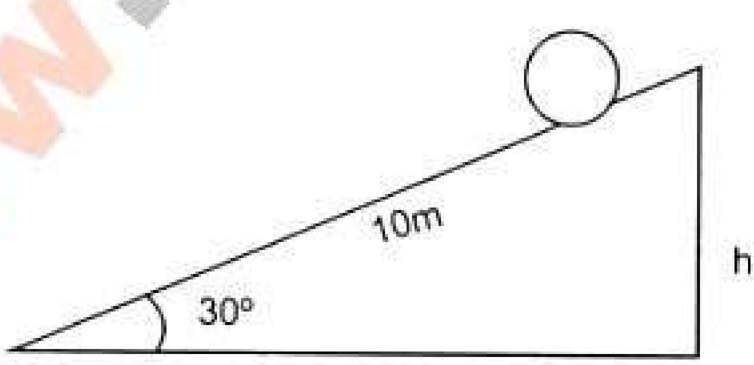
12.- Un cuerpo de 2 kg parte del punto A por la pista de la figura. Si $\mu = 0$, calcular:



a) La velocidad del cuerpo en el punto B,C, y D
b) Si la constante elástica del resorte es k =280 N/m, cuánto se comprime el resorte
c) Si durante todo el recorrido existiera rozamiento y el trabajo producido por éste fuera de 40 J, cuándo se comprimirá el resorte.

13.- Un cuerpo de 0.5 kg oscila en el extremo de una cuerda de 1.8 m de longitud formado un ángulo de 37° con la vertical. Calcular:
a) La velocidad del cuerpo en el punto más bajo de la trayectoria
b) La aceleración centrípeta en el mismo punto
c) La tensión de la cuerda en el punto mas bajo de la trayectoria

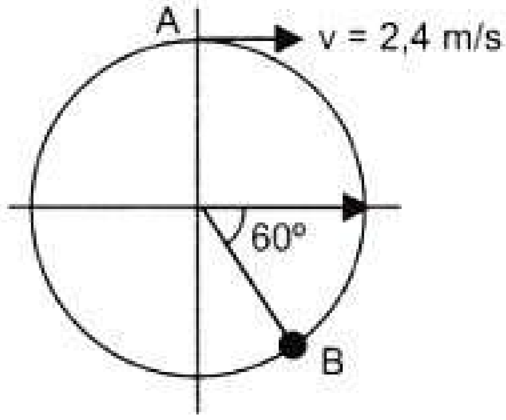
14.- Un cilindro macizo y homogéneo de 6 kg rueda sin razonamiento por el plano inclinado de la figura a lo largo de 10 m. Si parte del reposo, hallar al final del plano:



a) La velocidad lineal
b) La energía cinética de rotación

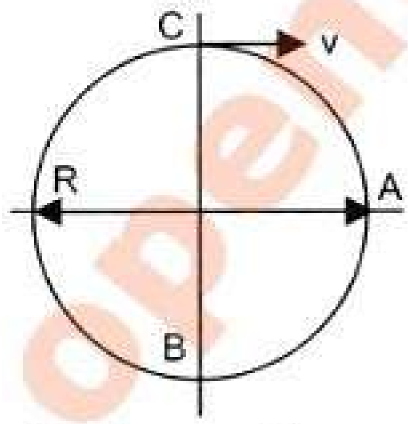
15. Sobre un péndulo cuyo cuerpo es de 300kg se dispara un proyectil de 42 g con una rapidez de 300 m/s. El proyectil atraviesa el cuerpo y sale con una rapidez de 120 m/s. Calcular:
a) Cuánta energía cinética pierde el proyectil al atravesar el cuerpo
b) Qué altura se eleva el cuerpo

16. Un cuerpo de 5 kg gira en un círculo vertical atado al extremo de una cuerda de 1m de longitud. Si la velocidad del cuerpo en la parte alta es 2,4 m/s, calcular:



a) La rapidez del cuerpo en el punto B
b) La tensión de la cuerda en el punto B
c) La mínima rapidez que debe tener el cuerpo en la parte más baja para que mantenga su trayectoria circular.

17.- Un cuerpo de 0,2 kg atado al extremo de una cuerda de 1.2 m de longitud, gira en el círculo vertical de la figura. Si la tensión de la cuerda en la parte superior es nula, hallar:



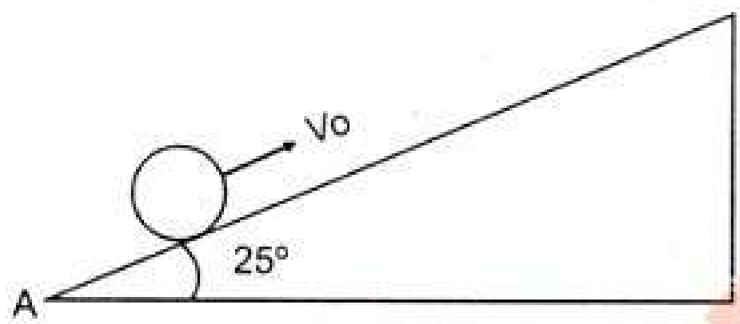
a) La velocidad del cuerpo en el punto C
b) La velocidad del cuerpo y la tensión de la cuerda en el punto A
c) La velocidad del cuerpo y la tensión de la cuerda en el punto B

18.- Un cuerpo de 30kg cae 1,8 m a partir del reposo y golpea el extremo superior de un resorte vertical de constante elástica k= 300 N/m. Hallar:
a) La compresión máxima del resorte
b) La máxima energía cinética

19.- Desde 8 m de altura con respecto al extremo superior de un resorte de constante elástica k= 500 N/m se deja caer un cuerpo. Si el resorte se comprime 0.4 m, calcular:
a) La masa del cuerpo
b) Con que rapidez choca el cuerpo al resorte
c) La rapidez que tiene el cuerpo cuando el resorte está comprimido 0.25 cm.

20.- Sobre un resorte vertical de constante elástica k= 420 N/m se coloca un cuerpo de 250 g. Cuando se comprime el resorte 8 cm, calcular:
a) Con qué rapidez sale el cuerpo cuando se suelta el resorte
b) Hasta qué altura sube el cuerpo.

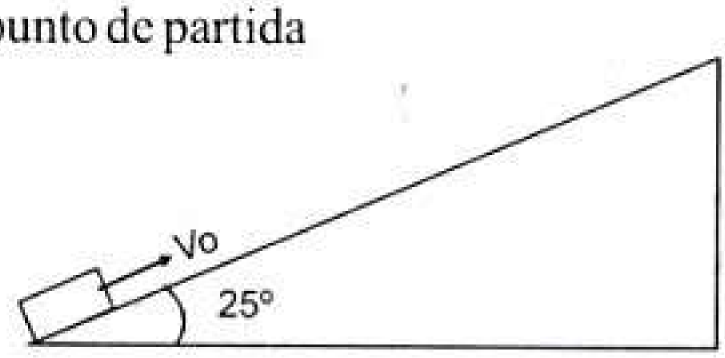
21.- En la figura, una esfera de 2 kg parte del punto A con una rapidez de 8m/s. Determinar:



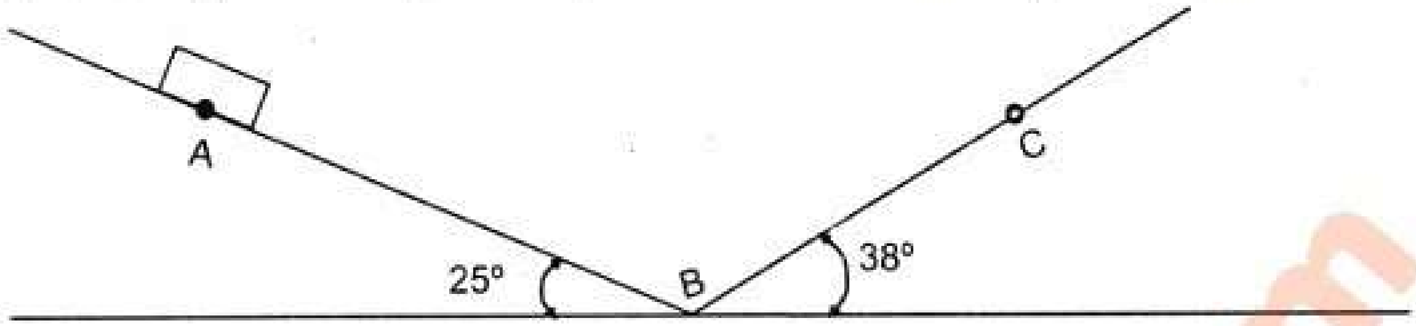
a) La energía cinética inicial del sólido
b) Qué distancia subirá la esfera por el plano.

22.- Un ciclista de 60kg y su bicicleta de 10 kg tienen una rapidez de 20m/s el momento de empezar a subir una cuesta, momento en el cual el ciclista deja de pedalear hasta que se detiene. Hallar:
a) La energía cinética del sistema el momento de empezar a subir la cuesta
b) La energía potencial gravitacional del sistema el momento que se detiene
c) La altura alcanzada
d) Si el sistema alcanza una altura de 14 m, cuánta energía cinética pasó a energía térmica
e) Si el sistema regresa libremente, pasando a energía térmica una cantidad igual a la que empleo en la subida, con cuánta energía cinética llegará abajo
f) Qué rapidez tendrá en ese momento

23.- Un cuerpo de 16 kg es impulsado hacia arriba del plano inclinado de la figura con una Vo = 8 m/s. Si sube 2.6 m a lo largo del plano, se detiene y regresa al punto de partida, calcular:
a) La fuerza de rozamiento
b) Con qué rapidez regresa al punto de partida

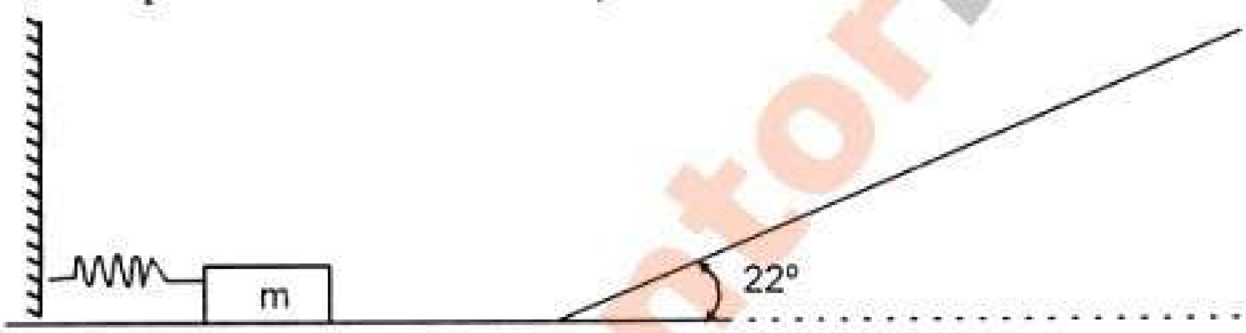


24.- Un cuerpo de 10kg se mueve sobre dos planos inclinados ($\mu = 0.3$). Si el cuerpo parte del reposo en el punto A y recorre 23 m hasta el punto B, determinar.



a) Qué distancia sube por el otro plano
b) Con qué rapidez regresa al punto B.

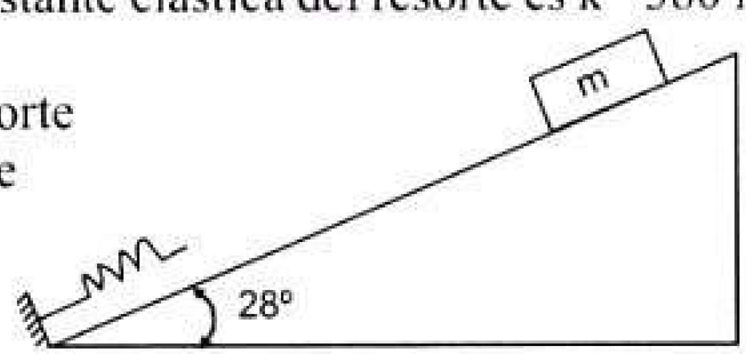
25.- En la figura el cuerpo es de 2 kg, la constante elástica del resorte $k = 450$ N/m y $\mu = 0$. Si se comprime el resorte 15 cm y se suelta, calcular:



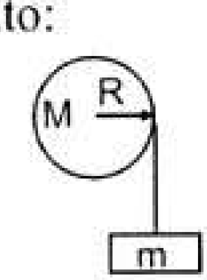
a) La energía potencial elástica del resorte antes de soltar el cuerpo
b) Con qué rapidez se desprende el cuerpo del resorte.
c) Qué altura alcanza el cuerpo en el plano inclinado
d) La distancia que recorre el cuerpo en el plano inclinado

26.- Un cuerpo de 20 kg desliza hacia abajo del plano inclinado de la figura una distancia de 2,9 m. Si $\mu = 0.25$ y la constante elástica del resorte es $k = 380$ N/m, calcular:

a) La máxima deformación del resorte
b) La máxima velocidad del bloque



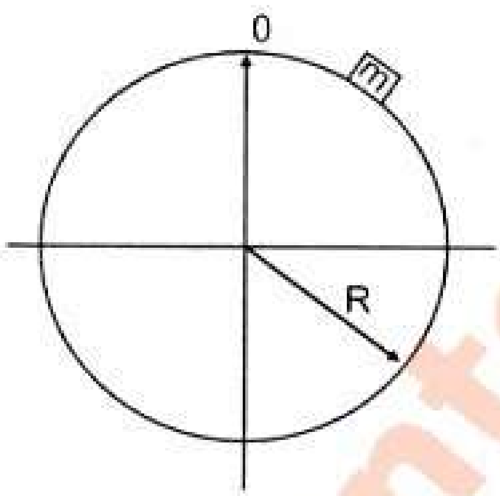
27.- Un cilindro macizo y homogéneo de 20 kg y 10 cm de radio tiene enrollado una cuerda de cuyo extremo está sujeto un cuerpo de 1,8 kg. Al dejar el sistema en libertad, el cuerpo desciende haciendo girar el cilindro. Calcular a los 6s de haberse iniciado el movimiento:



a) La velocidad lineal del cuerpo
b) La aceleración lineal del cuerpo
c) La velocidad angular del cuerpo

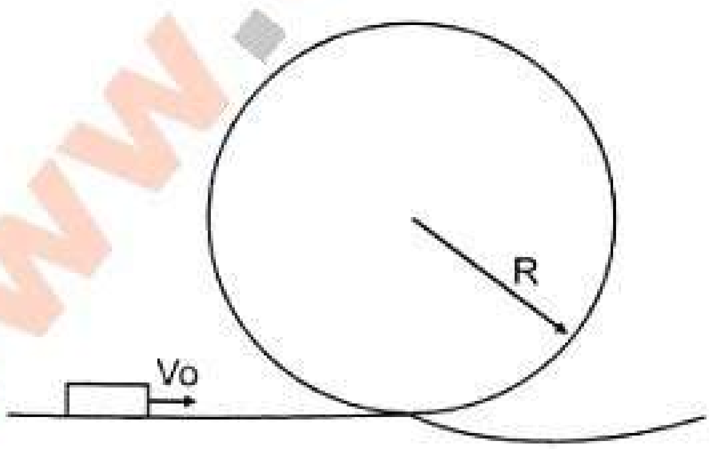
28.- Un cuerpo de 5 kg se mueve alrededor de un aro de 10m de radio. Si la velocidad tangencial en la parte superior del aro es 3 m/s, calcular la velocidad tangencial del cuerpo en la parte más baja del aro ($\mu = 0$)

29. Hallar en qué punto de la esfera el cuerpo se despega



Si $V_o = 0$
$\mu = 0$

30. Calcular la altura del punto en que se desprende el cuerpo cuando su rapidez inicial es $2\sqrt{gR}$



3.7 EVALUACION OBJETIVA

Completar:

1.- En el nivel de referencia, la energía potencial gravitatoria es..........................
....

2.- Cuando un cuerpo está en reposo, su energía cinética vale ....
....

3.- La fuerza deformadora es .... proporcional a la deformación del resorte.

4.- El trabajo de las fuerzas conservativas en una trayectoria cerrada es
....

5.- Cuando un cuerpo cae desde un avión, su energía cinética ....
....

6.- Si un cuerpo se aleja del nivel de referencia, gana energía ....
....

7.- Si la variación de la energía mecánica es.........................., la partícula aumenta su energía.

8.- El trabajo de la fuerza elástica es..................................cuando el extremo del resorte se aleja del punto de equilibrio.

9. Cuando se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba, durante su ascenso aumenta la energía..y disminuye la energía..

10.- El trabajo de las fuerzas....................................es independiente de la trayectoria.

11.- Si el trabajo de la fuerza elástica es positivo, el sistema...............
.... energía

12.- Cuando un medio elástico está estirado o comprimido se gana energía...

13.- Para mantener el módulo de una fuerza elástica constante, al aumentar la deformación de un resorte al doble, el valor de la constante elástica debe ....

14.- Si se reduce la rapidez de un cuerpo a la cuarta parte, su energía cinética será ....

15.- El trabajo de las fuerzas..depende de la trayectoria de la partícula.

16.- La variación de la energía mecánica en un sistema no conservativo, es igual al trabajo de...

17.- Si la variación de la energía cinética es nula, el cuerpo tiene movimiento...

18. Una lámpara colgada en techo de una habitación, tiene energía.......................... ....

19. Si el trabajo de la fuerza elástica es ....el sistema gana energía.

20. Cuando el extremo de un resorte se desplaza hacia el punto de equilibrio, el trabajo de la fuerza elástica es...

Escribir (V) verdadero o (F) falso

1.- La fuerza elástica está dirigida siempre hacia la posición de equilibrio.........( )

2.- Si se realiza trabajo sobre una partícula, su energía cinética necesariamente aumenta .... ( )

3.- En ausencia de rozamiento, la suma de las energías cinéticas y potencial permanece constante ....( )

4.- Energía potencial es la que depende de la posición de la partícula ....( )

5.- Si la variación de la energía mecánica de una partícula es negativa, ésta pierde energía .... ( )

6.- La energía mecánica en un sistema conservativo es constante ....( )

7.- En un sistema no conservativo, el sistema puede ganar o perder energía...( )

8.- Las fueras no conservativas son igual a la diferencia entre las fuerzas activas y las fuerzas resistivas.. ( )

9.- La fuerza elástica es variable.. ( )

10.- Las unidades de la energía son las mismas que las del trabajo .... ( )

11.- La energía cinética no puede convertirse en energía calorífica.............( )

12.- El trabajo de la fuerza elástica no depende de la trayectoria...............( )

13.- La energía es una magnitud vectorial... ( )

14.- La fuerza que se realiza para deformar un resorte es constante..............( )

15.- El trabajo de la fuerza neta es igual a la variación de la energía cinética.....( )

16.- Fuerzas internas es un término equivalente a fuerzas conservativas ....( )

17.- Para que la energía mecánica sea constante, no debe existir rozamiento ....( )

18.- El trabajo realizado por el peso de un cuerpo es igual a la variación de la energía potencial gravitatoria...( )

19.- La energía cinética depende de la dirección de la velocidad del cuerpo...( )

20.- El trabajo de la fuerza de fricción puede incrementar la energía de un cuerpo ....( )

Subrayar la respuesta correcta.

1.- Dos cañones idénticos A y B disparan proyectiles directamente hacia arriba. Si la masa de los proyectiles está en relación $m_B = 2\,m_A$ y la altura que alcanza el proyectil A es h, la altura que alcanza el proyectil B es:

a) h $\sqrt{\quad}$
b) h/ 2
c) h/2
d) h/4

2.- En el punto de equilibrio de un medio elástico, la suma de las fuerzas aplicadas es:
a) cero
b) constante
c) mg
d) -mg

3.- Una partícula de masa m se deja caer desde una altura h hasta el piso:
a) La velocidad de la partícula al tocar el piso es proporcional a h
b) La velocidad de la partícula al tocar el piso es proporcional a m
c) La energía cinética de la partícula al tocar el piso es proporcional a h
d) La energía cinética de la partícula al tocar el piso es proporcional a h^2

4.- Si la altura de un cuerpo fuera la mitad, la energía potencial gravitatoria sería:
a) El doble
b) La cuarta parte
c) La mitad
d) La misma

5.- La energía mecánica en un sistema conservativo es:
a) constante
b) nulo
c) positivo
d) negativo

6.- Un saltador de garrocha alcanza su altura máxima convirtiendo toda su energía cinética en energía potencial gravitatoria. Si el momento de comenzar esta conversión tiene una velocidad V, la altura máxima es:
a) $V/2g$
b) $2g/V^2$
c) $V^2/2g$
d) $\sqrt{2gV}$

7.- Si se duplica la velocidad de un cuerpo, su energía cinética respecto a la original es:
a) El doble
b) La mitad
c) Cuatro veces
d) La cuarta parte

8.- El trabajo de las fuerzas conservativas en una trayectoria cerrada es:
a) constante
b) nulo
c) positivo
d) negativo

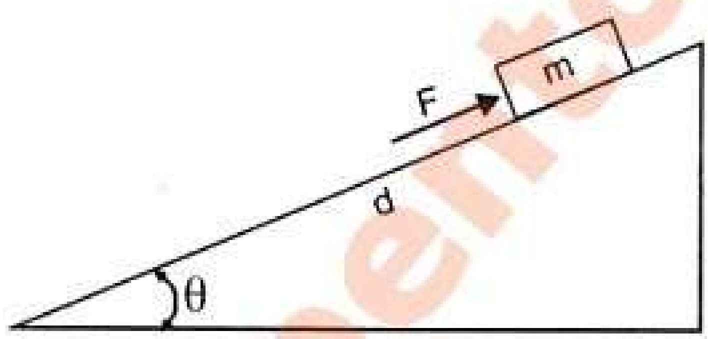
9.- Cuando el extremo de un resorte se aleja de la posición de equilibrio, el trabajo de la fuerza elástica es:
a) positivo
b) negativo
c) nulo
d) máximo

10.- Si la velocidad inicial es igual a la final, la variación de energía cinética es:
a) positiva
b) negativa
c) constante
d) nula

11.- La energía mecánica en un sistema no conservativo:
a) es constante
b) es nulo
c) varía
d) no existe

12.- Si se duplica la deformación de un resorte, la fuerza recuperadora es:
a) el doble
b) la mitad
c) la cuarta parte
d) la misma

13.- El cuerpo de la figura es empujado hacia arriba del plano inclinado ($\mu = 0$) con una fuerza F. Cuando el cuerpo parte del reposo y llega a la parte superior del plano con una velocidad V, el trabajo realizado es:



a) $mgd.\cos\theta$
b) $mgd.\text{sen}\theta$
c) $mgd.\cos\theta + \frac{1}{2} mV^2$
d) $mgd.\text{sen}\theta + \frac{1}{2} mV^2$

14.- Si la variación de la energía cinética es nula, el cuerpo tiene un movimiento:
a) parabólico
b) uniforme
c) acelerado
d) retardado

15.- La dimensión de la constante elástica (k) de un resorte es:
a) $[ML^{2}T^{-1}]$
b) $[MT^{-2}]$
c) $[MLT^{-2}]$
d) $[ML^{2}T^{-2}]$

16.- Una particula está sujeta exclusivamente a una fuerza conservativa
a) cuando la rapidez aumenta y la energía potencial gravitatoria también aumenta
b) cuando la rapidez aumenta y la energía potencial gravitatoria disminuye
c) cuando la rapidez aumenta y la energía cinética disminuye
d) N.R.A

17.- Si la masa de un cuerpo fuese la mitad, para mantener la energía cinética original, la rapidez respecto a la original debería ser:
a) El doble
b) $\sqrt{2}$
c) Cuatro veces
d) N.R.A.

18.- Un cañón dispara un proyectil directamente hacia arriba. La altura máxima que alcanza el proyectil es h(m), cuando se ha comprimido el resorte del cañón x(cm). Para que el proyectil alcance una altura 3h, el resorte del cañón debe comprimirse:
a) $\sqrt{3}\,x$ (cm)
b) $3\sqrt{2}\,x$ (cm)
c) 6x (cm)
d) N.R.A.

19.- La altura de la que debería caer una particula para adquirir una energía cinética equivalente a la que tendría si se moviera con una rapidez de 15m/s es:
a) 22,96 m
b) 11,48 m
c) 4,79 m
d) N.R.A.

20. Si se duplica la deformación de un resorte, la nueva energía potencial elástica respecto a la original es:
a) El doble
b) La mitad
c) Cuatro veces
d) La cuarta parte

4. MOMENTUM LINEAL

La cantidad de movimiento lineal o momentum lineal de una partícula se define como el producto de su masa por su velocidad y se representa con la letra $\vec{P}$:

$$\vec{P} = m \, . \, \vec{V} \qquad \textbf{(4.1.1)}$$

La cantidad de movimiento lineal es un concepto físico de mucha importancia, porque combina dos elementos que caracterizan el estado dinámico de una partícula su masa y su velocidad

Unidades: la cantidad de movimiento lineal es una magnitud vectorial que tiene la misma dirección de la velocidad $(\vec{u_p} = \vec{u_v})$, cuyas unidades son la de una masa multiplicadas por una velocidad:

En el SI: $m. \vec{V} = \vec{P}$

$1[kg].1[m/s] = 1[kg.m/s]$

En el CGS: $m \, . \, \vec{V} = \vec{P}$

$1[g].1[cm/s] = 1[g.cm/s]$

Dimensiones: $\vec{P} = m \, . \, \vec{V}$

$[P] = [ML/T]$

$[P] = [MLT^{-1}]$

4.2 IMPULSO LINEAL

Si una partícula de masa m, se mueve bajo la acción de una fuerza neta $\vec{F}$ que puede ser variable, se tendrá que ésta experimenta en cada instante una aceleración a. Según la segunda ley de Newton:

$$\vec{F} = m.\vec{a}; \qquad \text{pero } \vec{a} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$$

$$\vec{F} = m\,\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} \quad ; \text{si } \Delta t \rightarrow 0$$

$$\vec{F}\,.\,\Delta t = m\,.\,\Delta\vec{V}\ ; \text{como } \Delta\vec{V} = \vec{V} - \vec{V}_o$$
$$\vec{F}\,.\,\Delta t = m\,.\,\vec{V} - m\,.\,\vec{V}_o$$

$$\vec{F}\,.\,\Delta t = \vec{P} - \vec{P}_o = \Delta\vec{P}$$
$$\vec{F}\,.\,\Delta t = \Delta\vec{P} \qquad \textbf{(4.2.1)}$$

Al producto ($\vec{F}\,.\ \Delta t$) se le denomina *impulso*, y es igual a la variación de la cantidad de movimiento lineal que experimenta la partícula debido a la acción de la fuerza $\vec{F}$, en el intervalo infinitésimo de tiempo Δt.

Si la fuerza es constante o si se considera una fuerza promedio $\vec{F}$ en un intervalo cualesquiera de tiempo ($\Delta t = t - to$), se tendrá:

$$\vec{F}\,.\ \Delta t = \Delta\vec{P} \text{ o } \vec{F}m\,.\ \Delta t = \Delta\vec{P}$$

Unidades: el impulso es una magnitud vectorial que tiene la misma dirección de la fuerza ($\vec{u}_{F\cdot\Delta t} = \vec{u}_F$), cuyas unidades son las de una fuerza multiplicadas por una de tiempo:

En el SI: $\vec{F}\,.\ \Delta t = \Delta\vec{P}$
$1(N)\,.\,1[s] = 1[N.s]$

En el CGS: $\vec{F}\,.\ \Delta t = \Delta\vec{P}$
$1[dina]\,.\,1[s] = 1[dina.s]$

Dimensiones: $\vec{F}\,.\,\Delta t = \Delta\vec{P}$

$$[\vec{F}\,.\,\Delta t] = [MLT^{-2}T]$$

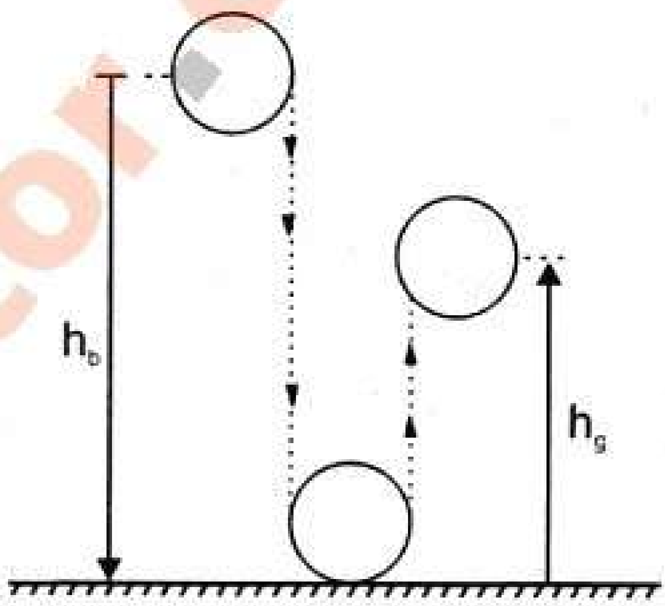
$$[\vec{F}\,.\,\Delta t] = [MLT^{-1}]$$

Ejemplos

1.- Una pelota de 100g se deja caer desde un altura de 2m sobre una superficie horizontal (piso) luego de rebotar en ésta alcanza una altura máxima de 1.5m, determinar.

a) La velocidad con que la pelota llega al piso y la velocidad con que rebota en éste.
b) La cantidad de movimiento lineal de la pelota al llegar y al rebotar en el piso
c) El impulso de todas las fuerzas actuantes sobre la pelota en el choque.

$m = 100g = 0{,}1\ kg$



a) V = rapidez con que llega al piso

$V_o = 0$

$h_b = 2m$

$V^2 = V_o^2 + 2gh$

$V^2 = 2gh$

$V^2 = 2 \,.\, 9{,}8\ m/s^2 \,.\, 2m$

$V = 6{,}26\ m/s$

$\vec{V} = -6{,}26\,\vec{j}\ (m/s)$

V_R = rapidez con que rebota en el piso

$V_{final} = 0$

$h_s = 1{,}5m$

$V_F^2 = (V_R)^2 - 2gh_s$

$V_R^2 = 2gh$

$V_R^2 = 2 \,.\, 9{,}8 m/s^2 \,.\, 1{,}5m$

$V_R = 5{,}42\ m/s$

$\vec{V_R} = 5{,}42\,\vec{j}\ (m/s)$

b) Cantidad de movimiento al llegar al piso:

$\vec{P} = m.\vec{V}$

$\vec{P} = 0{,}1\ kg\ [-6{,}3\vec{j}\ (m/s)]$

$\vec{P} = -0{,}63\vec{j}\ (kg.m/s)$

Cantidad de movimiento al rebotar en el piso:

$\vec{P}_R = m\ .\ \vec{V}_R$

$\vec{P}_R = 0{,}1\ kg\ [5{,}42\vec{j}\ (m/s)]$

$\vec{P}_R = 0{,}542\vec{j}\ (kg.m/s)$

c) Impulso $= \Delta\vec{P}$

Impulso $= \vec{P}_R - \vec{P}$

Impulso $= [0{,}54\vec{j} - (-0{,}63\vec{j})]\ (kg.m/s)$

Impulso $= 1.17\vec{j}\ (kg.m/s)$

2.- Una pelota de 50 g con una velocidad $\vec{V} = 10\,\vec{i}$ (m/s) golpea contra una pared vertical y rebota con una rapidez de 8m/s en sentido contrario. Si el choque duró 5×10^{-3} s. calcular la fuerza promedio ejercida por la pared sobre la pelota.

m = 50g = 0,05 kg

$\vec{V}_o = 10\vec{i}\ (m/s)$

$\vec{V} = -8\vec{i}\ (m/s)$

$\Delta t = 5 \times 10^{-3}$ s

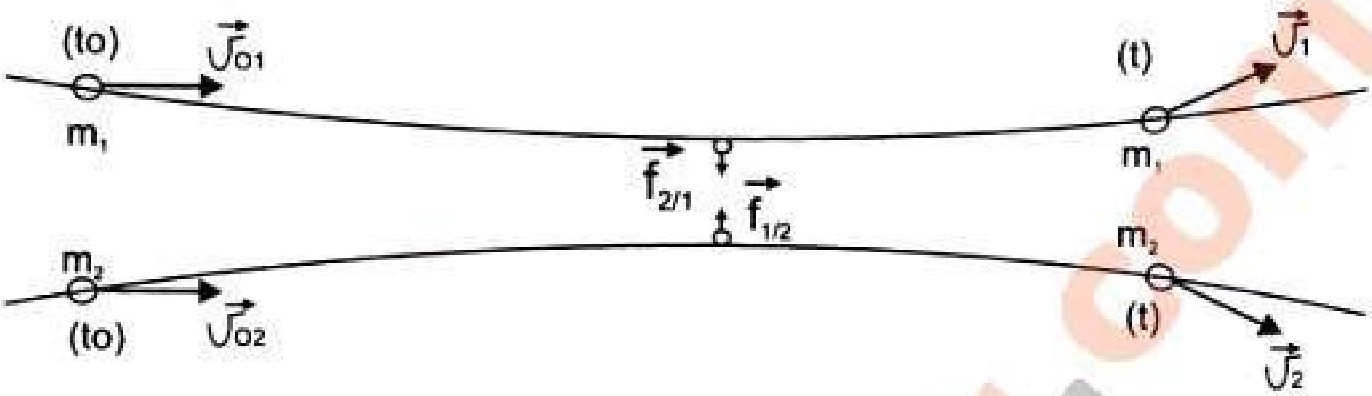
$\vec{F}.\Delta t = m(\vec{V} - \vec{Vo})$

$\vec{F} = \dfrac{m(\vec{V} - \vec{V}_o)}{\Delta t} = \dfrac{0{,}05kg(-8\vec{i} - 10\vec{i})m/s}{5 \times 10^{-3}s}$

F = -180N

4.3 CONSERVACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO LINEAL

Consideremos un sistema conformado por dos partículas sujetas únicamente a su interacción y asilados del resto del universo. Como resultado de esta interacción la velocidad de cada una cambia, como se representa en el siguiente gráfico:



$\vec{F}_{2/1}$: fuerza que la partícula (2) ejerce sobre la (1)

$\vec{F}_{1/2}$: fuerza que la partícula (1) ejerce sobre la (2)

$$\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1} \qquad (4)$$

El impulso sobre (1) es:

$$\vec{F}_{2/1} \cdot \Delta t = \Delta\vec{P}_1 \qquad (5)$$

El impulso sobre (2) es:

$$\vec{F}_{1/2} \cdot \Delta t = \Delta\vec{P}_2 \qquad (6)$$

Sumando (5) y (6) y reemplazando (4) se tiene:

$\vec{F}_{2/1} \cdot \Delta t + \vec{F}_{1/2}\, \Delta t = \Delta\vec{P}_1 + \Delta\vec{P}_2$, Δt es el mismo para los dos , luego

$$\vec{F}_{2/1} \cdot \Delta t - \vec{F}_{2/1}\, \Delta t = \Delta\vec{P}_1 + \Delta\vec{P}_2$$

$\Delta\vec{P}_1 + \Delta\vec{P}_2 = 0 = \Delta(\vec{P}_1 + \vec{P}_2)$, o lo que es lo mismo:

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_{total} = \text{cte}$$

$$\vec{P}_1 + \vec{P}_2 = \vec{P}_{1(0)} + \vec{P}_{2(0)} = \text{cte}$$

Lo anterior también puede extenderse a un sistema con cualquier número de partículas que estén interactuando entre ellas, siempre que la fuerza neta externa sea nula. Esto se conoce como el principio de conservación de la cantidad de movimiento que se expresa: *en ausencia de una fuerza neta externa, la cantidad de movimiento lineal de un sistema de partículas permanece constante.*

$\vec{P}_{TOTAL} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \ldots + \vec{P}_n = cte$, *además*

$P_{TOTAL(x)} = cte:$
$P_{1x} + P_{2x} + \ldots + P_{nx} = m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} + \ldots + m_n V_{nx}$

$P_{TOTAL(y)} = cte:$
$P_{1y} + P_{2y} + \ldots + P_{ny} = m_1 V_{1y} + m_2 V_{2y} + \ldots + m_n V_{ny}$

Es decir si $\vec{P}$ es constante, también lo serán sus componentes en cualquier dirección.

Ejemplos:

1.- Una pelota de 300g se mueve hacia la derecha sobre el eje de las x con una rapidez de 16m/s y choca frontalmente con otra de 500g que está en reposo. Si luego del choque se mueven juntos, cual es la velocidad del conjunto.

$m_1 = 300g = 0{,}3\ kg$
$m_2 = 500g = 0{,}5\ kg$

$\vec{V}_{1(0)} = 16\vec{i}\,(m/s)$ o $V_{1(0)} = 16\,(m/s)$

$V_{2(0)} = 0\,(m/s)$

$V_1 = V_2 = V = ?$

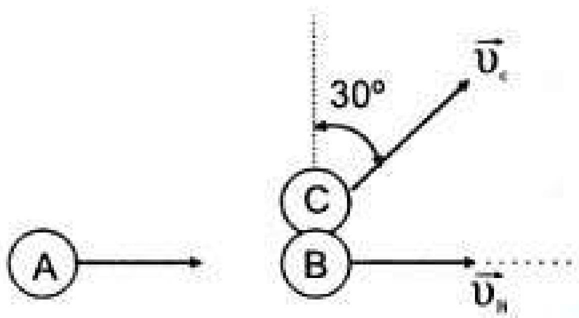
$m_1\ V_{1(0)} + m_2 V_{2(0)} = m_1 V_1 + m_2 V_2$, pero $V_1 = V_2 = V$

$m_1\ V_{1(0)} = V(m_1 + m_2)$

$$V = \frac{m_1\ V_{1(0)}}{(m_1 + m_2)} = \frac{0{,}3\ kg\ .\ 16 m/s}{(0{,}3\ kg + 0{,}5 kg)} = 6 (m/s)$$

$$\vec{V} = 6\vec{i}\,(m/s)$$

2.- Una bola de billar (A) se desplaza con una velocidad $\vec{V}_{A(0)} = 20\ \vec{i}$ m/s en el instante que choca contra otras dos (B) y (C) que se encuentran juntas y en reposo. Si luego del choque (A) tiene una velocidad $\vec{V}_A = (5\vec{i} - 4\vec{j})$ (m/s) y (B) y (C) se mueven en las direcciones indicadas determinar las velocidades de estas esferas.



$m_A = m_B = m_C = m$

Antes del choque

$\vec{V}_{A(0)} = 20\ \vec{i}$ m/s

$V_{B(0)} = V_{C(0)} = 0$ m/s

Después del choque

$\vec{V}_A = (5\vec{i} - 4\vec{j})$ (m/s)

$\vec{V}_B = V_B\vec{i}$ **(1)**

$\vec{V}c = Vc\,sen\,30^o\,\vec{i} + Vc\cos 30^o\,\vec{j}$ **(2)**

$Px = cte$

$m_A V_{Ax(0)} + m_B V_{Bx(0)} + m_C V_{Cx(0)} = m_A V_{Ax} + m_B V_{Bx} + m_c V_{cx}$

$m[V_{Ax(0)} + V_{Bx(0)} + V_{cx(0)}] = m[V_{Ax} + V_{Bx} + V_{cx}]$

$20\ m/s = 5\ m/s + V_B + V_c\,sen\,30^o$

$15\ m/s = V_B + V_c\,sen\,30^o$ **(3)**

$Py = cte$

$m_A V_{Ay(0)} + m_B V_{By(0)} + m_C V_{Cy(0)} = m_A V_{Ay} + m_B V_{By} + m_c V_{cy}$

$m[V_{Ay(0)} + V_{By(0)} + V_{cy(0)}] = m[V_{Ay} + V_{By} + V_{cy}]$

$0 = -4 m/s + V_c \cos 30^o$

$4\ m/s = V_c \cos 30^o$

$V_C = 4.62\ m/s$

Reemplazando en (3)

$V_B = 12,69\ m/s$

$\vec{V}_B = 12,69\,\vec{i}\,(m/s)$

De (2) las componentes de $\vec{V}_C$ son:

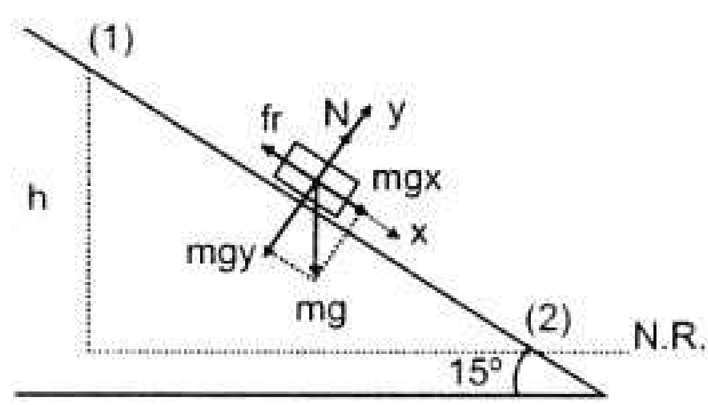
$V_{Cy} = 4,62\ m/s.\cos 30°$ $\quad$ $V_{Cx} = 4,62\ m/s.\text{sen}30°$

$V_{Cy} = 4,0\ m/s$ $\quad$ $V_{Cx} = 2,31\ m/s$

La velocidad $\vec{V}_C$ es:

$\vec{V}_C = (2,31\ \vec{i} + 4\vec{j})\ m/s$

3.- Un cuerpo de 3kg desliza por el plano inclinado de la figura. Si parte del reposo y $\mu = 0.2$, determinar la rapidez del cuerpo cuando ha recorrido 8m empleando:
a) La segunda ley de Newton
b) La conservación de la energía
c) La ecuación trabajo-energía
d) Cantidad de movimiento



$h = 8m\ .\ \text{sen}\ 15°$

a) $\Sigma Fy = 0$
$N = mg.\cos 15°$

$V^2 = Vo^2 + 2ad$
$V^2 = 2(0{,}64\ m/s^2)(8m)$
$V = 3{,}2\ m/s$

$\Sigma Fx = ma$
$mg.\text{sen}\ 15° - fr = ma$
$mg.\text{sen}\ 15° - \mu.mg.\cos 15° = ma$
$a = g(\text{sen}\ 15° - \mu.\cos 15°)$
$a = 0{,}64\ m/s^2$

b) $W_{FNC} = \Delta E_M$ (sistema no conservativo)
$W_{FNC} = E_{M2} - E_{M1}$
$-fr.d = Ec_2 + Ep_{g2} + Ep_{e2} - Ec_1 - Ep_{g1} - Ep_{e1}$
$-\mu.mg.\cos 15°\ .\ d = \frac{1}{2}mV^2 - mgh$
$-0{,}2.9{,}8\ m/s^2.\cos 15°.8m = \frac{1}{2}V^2 - 9{,}8m/s^2.8m.\text{sen}15°$
$V^2 = 2(20{,}29m^2/s^2) - 15{,}15\ m^2/s^2$
$V = 3{,}2\ m/s$

c) $W_{1\text{-}2} = \Delta Ec$
$W_{1\text{-}2} = Ec_2 - Ec_1$
$(mg.\text{sen}\ 15° - fr)d = \frac{1}{2}mV^2$
$(mg.\text{sen}\ 15° - \mu.mg.\cos 15°)d = \frac{1}{2}mV^2$
$(9{,}8\ m/s^2\ .\ \text{sen}\ 15° - 0{,}2\ .\ 9{,}8\ m/s^2\ .\ \cos 15°)\ 8m = \frac{1}{2}V^2$
$V^2 = 2(2{,}54m/s^2 - 1{,}89m/s^2)\ 8m$
$V = 3{,}2\ m/s$

d) $d = V_m\ .\ \Delta t$, como $V_m = \dfrac{V_1 + V_2}{2} = \dfrac{V_2}{2}$ tenemos que:

$$d = \frac{V_2}{2}.\Delta t$$

$$\Delta t = \frac{2d}{V_2}$$

aplicando la cantidad de movimiento:

$$\frac{\Delta mV}{\Delta t} = F_R$$

$$\frac{mV_2 - mV_1}{\Delta t} = mg.sen\ 15^o - fr$$

$$mV_2 = \Delta t\,(mg.sen\ 15^o - \mu.mg.cos15^o)$$

$$V_2 = \frac{2d}{V_2}\,(g.sen\ 15^o - \mu.g.cos\ 15^o)$$

$$V_2^2 = 2(8m)(9{,}8\ m/s^2 .\ sen\ 15^o - 0{,}2\ .\ 9{,}8\ m/s^2 .\ cos\ 15^o)$$
$$V_2^2 = 16m\,(2{,}54\ m/s^2 - 1{,}89\ m/s^2)$$
$$V_2 = 3{,}2\ m/s$$

4.4 CHOQUES PERFECTAMENTE ELASTICOS Y PERFECTAMENTE INELASTICOS:

El principio de conservación de la cantidad de movimiento lineal tiene aplicación en la descripción del comportamiento de cuerpos que chocan, puesto que en este fenómeno los cambios que pueden sufrir los cuerpos en la velocidad se deberán exclusivamente a sus interacciones en el instante del choque.

Sin embargo este principio no es suficiente para determinar el valor de las velocidades de los cuerpos luego del choque, por lo que resulta necesario establecer cuál es el tipo de choque, elástico o inelástico.

Choque Perfectamente Elástico. Considerando el choque de dos cuerpos, primeramente tendremos que:

$$m_1\,\vec{V}_{1(0)} + m_2\vec{V}_{2(0)} = m_1\vec{V}_1 + m_2\vec{V}_2 \qquad \text{(conservación de } \vec{P}\text{)}$$

El choque se define como perfectamente elástico cuando la energía total antes del choque es igual a la energía total después del choque, es decir cuando permanece constante:

$$\tfrac{1}{2}m_1V_{1(0)}^2 + \tfrac{1}{2}\,m_2V_{2(0)}^2 = \tfrac{1}{2}\,m_1V_1^2 + \tfrac{1}{2}\,m_2V_2^2$$

En este tipo de choque, una parte de la energía cinética se transforma en energía potencial elástica de las moléculas durante la interacción la misma que es restituida totalmente luego como energía cinética.

Choque perfectamente inelástico. Como en cualquier choque se tiene primeramente que:

$$m_1\vec{V}_{1(0)}+m_2\vec{V}_{2(0)}=m_1\vec{V}_1+m_2\vec{V}_2 \qquad \text{(conservación de } \vec{P}\text{)}$$

El choque se define como perfectamente inelástico cuando los dos cuerpos se pegan al chocar, lo que significa que luego de éste ambos poseen la misma velocidad.

$$\vec{V}_1=\vec{V}_2$$

En este tipo de choque la energía cinética total no permanece constante, parte de ésta *se disipa* generalmente en forma de calor.

Cuando el choque ocurre en una sola dirección (choque frontal) puede ser conveniente que en la ecuación vectorial de la conservación de la cantidad de movimiento lineal, se considere únicamente las componentes de la velocidad, es decir con los signos (+ o -) según el eje de referencia.

Si el choque ocurre en un plano se planteará la conservación de la cantidad de movimiento en las direcciones de los ejes que forman el plano es decir:

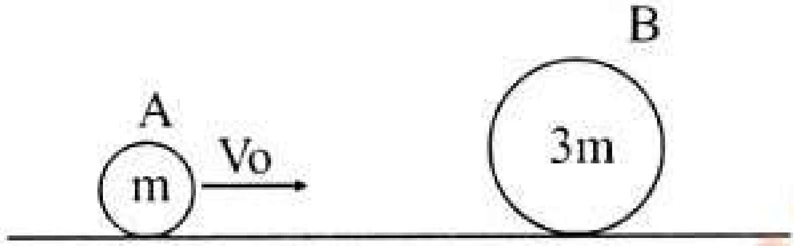
$$m_1V_{1x(0)}+m_2V_{2x(0)}=m_1V_{1x}+m_2V_{2x}$$

$$m_2V_{1y(0)}+m_2V_{2y(0)}=m_1V_{1y}+m_2V_{2y}$$

Los choques perfectamente elásticos o perfectamente inelásticos son los casos límite entre las características que podría tener un choque en relación a la conservación de la energía cinética o a su máxima variación respectivamente. Sin embargo en los intermedios llamados *simplemente elásticos o semi-elásticos o semi- inelásticos*, siempre se conserva la cantidad de movimiento.

Ejemplos:

1.- Una pelota (A) de masa m y velocidad $V_o\vec{i}$ choca frontal y elásticamente con otra (B) de masa 3m que está en reposo. Determinar la velocidad de cada una luego del impacto.



$m_A = m$
$m_B = 3m$

Conservación de *P*:

$$m_A V_{A(0)} + m_B V_{B(0)} = m_A V_A + m_B V_B$$
$$mV_0 = mV_A + 3mV_B$$
$$V_0 = V_A + 3V_B \qquad \textbf{(1)}$$

Conservación de la energía cinética:

$$\tfrac{1}{2} m_A V_{A(0)}^2 + \tfrac{1}{2} m_B V_{B(0)}^2 = \tfrac{1}{2} m_A V_A^2 + \tfrac{1}{2} m_B V_B^2$$
$$\tfrac{1}{2} mV_0^2 = \tfrac{1}{2} mV_A^2 + \tfrac{1}{2}.3mV_B^2$$
$$V_0^2 = V_A^2 + 3V_B^2 \qquad \textbf{(2)}$$

Despejando V_A en (1) y reemplazando en (2):

$$V_0^2 = (V_0 - 3V_B)^2 + 3V_B^2$$

$$V_0^2 = V_0^2 - 6V_0V_B + 9V_B^2 + 3V_B^2$$
$$12V_B^2 - 6V_0V_B = 0$$
$$12V_B = 6V_0$$

$$V_B = \tfrac{1}{2}V_0 \Rightarrow \vec{V}_B = \tfrac{1}{2}V_0\vec{i}$$

Reemplazando en (3):

$$V_A = V_0 - 3(1/2V_0)$$
$$V_A = -\tfrac{1}{2}V_0 \Rightarrow \vec{V}_A = -\tfrac{1}{2}V_0\vec{i}$$

2.- Dos bolas de billar chocan inelásticamente entre si con velocidades de $\vec{V}_{A(0)}=(4\vec{i}+5\vec{i})$ (m/s) y $\vec{V}_{B(0)}=(6\vec{i}-3\vec{i})$ (m/s). Determinar:

a) La velocidad de cada una de las bolas luego del choque
b) El porcentaje de energía perdida por el conjunto en el choque

a) Si el choque es inelástico las dos bolas tendrán igual velocidad luego del choque, por lo que:

Aplicando el principio de conservación de P:
$m_A = m_B = m$

$$\vec{V}_{A(0)} = (4\vec{i}+5\vec{j})\ (m/s)$$

$$\vec{V}_{B(0)} = (6\vec{i}-3\vec{j})\ (m/s)$$

$$\vec{V}_A = \vec{V}_B = \vec{V}$$

$$m_A\vec{V}_{A(0)} + m_B\vec{V}_{B(0)} = m_A\vec{V} + m_B\vec{V}$$

$$\vec{V}_{A(0)} + \vec{V}_{B(0)} = 2\vec{V}$$

$$\vec{V} = \frac{\vec{V}_{A(0)} + \vec{V}_{B(0)}}{2} = \frac{(4\vec{i}+5\vec{j}+6\vec{i}-3\vec{j})m/s}{2}$$

$$\vec{V} = (5\vec{i}+\vec{j})\ (m/s)$$

b)
$$V_{A(0)}^2 = V_{Ax(0)2}^2 + V_{Ay(0)2}^2 = (4^2+5^2)\ m^2/s^2 = 41\ m^2/s^2$$
$$V_{B(0)}^2 = V_{Bx(0)2}^2 + V_{By(0)}^2 = [6^2+(-3)^2]\ m^2/s^2 = 45\ m^2/s^2$$
$$Ec_{(0)} = \tfrac{1}{2}m_A V_{A(0)}^2 + \tfrac{1}{2}m_B V_{B(0)}$$
$$Ec_{(0)} = \tfrac{1}{2}m(41 m^2/s^2) + \tfrac{1}{2}m(45 m^2/s^2)$$
$$Ec_{(0)} = 43\ m\ (J)$$

$$V^2 = Vx^2 + Vy^2 = (5^2+1^2)m^2/s^2 = 26\ m^2/s^2$$

$$Ec_{(f)} = \tfrac{1}{2}(m_A+m_B)\ V^2$$

$$Ec_{(f)} = \tfrac{1}{2}(2m)\ 26\ m^2/s^2$$

$Ec_{(f)} = 26m(J)$

$Ec_{perdida} = 43m(J) - 26m(J) = 17m\,(J)$

$\%\, Ec_{perdida} = \frac{17\ m}{43\ m} \times 100\%$

$\%\, Ec_{perdida} = 39{,}5\,\%$

4.5 EJERCICIO No. 7

1.- Un vehículo de 1000kg se desplaza por una carretera recta horizontal con una velocidad de $(72\,\vec{i})$ km/h. Calcular su cantidad de movimiento lineal.

2.- Un auto de 900kg se desplaza con una rapidez de 98km/h por una carretera recta en el momento en que se le aplican los frenos. Si el auto frena uniformemente y se detiene luego de 10 s, determinar el valor de la fuerza aplicada por los frenos.

3.- Sobre una partícula de 2kg actúa una fuerza neta de 200 (N), calcular:
a) El impulso desarrollado por la fuerza en 10 s.
b) La rapidez final de la partícula, si partió del reposo

4.- Una pelota de 0.25kg choca una pared con una velocidad de $(20\,\vec{i})$ m/s y rebota con una rapidez de $(-18\,\vec{i})$ m/s. Determinar
a) La variación de la cantidad de movimiento lineal en el choque
b) La fuerza media que la pared ejerció sobre la pelota, si el choque tuvo una duración de 0.05s.

5.- Un cazador con una escopeta de 5kg dispara una bala de 50g con una rapidez de 300 m/s. Hallar:
a) La velocidad de retroceso de la escopeta
b) La fuerza que se soporta el cazador debido al retroceso de la escopeta, si éste es amortiguado en 0,1 s.

6.- Una granada que estaba en reposo explota en tres fragmentos. Uno de ellos de 1kg de masa sale disparado con una velocidad de $(50\,\vec{i})$ m/s; el segundo fragmento de masa 2kg sale con una velocidad de $(40\,\vec{j})$ m/s. Calcular:

a) La rapidez del tercer fragmento, si su masa es 1kg

b) La dirección en que sale disparado el tercer fragmento

7.- Una granada se mueve con una velocidad $\vec{Vo}$ en el instante en que explota en dos fragmentos, uno de ellos de masa 1kg sale disparado con una velocidad de $(30\,\vec{i})$ m/s y el segundo de masa 3kg lo hace con una velocidad de $(-20\,\vec{j})$ m/s. Determinar:

a) La velocidad $\vec{Vo}$ con que se movía inicialmente la granada

b) la rapidez y dirección del movimiento inicial de la granada

8.- Un cuerpo de 2kg que se mueve con una rapidez de 20m/s choca contra otro de 5kg que lo hace con una rapidez de 10 m/s en la misma dirección y sentido del primero. Hallar:

a) La rapidez de cada cuerpo inmediatamente después del choque

b) La rapidez de cada cuerpo si inicialmente se movían en sentido contrario

9.- Un cuerpo A de masa 2kg choca frontalmente contra otro B que se encontraba en reposo. Si luego del choque se tiene que $V_A = 2V_B$ y los cuerpos se mueven en sentidos contrarios, calcular:

a) La masa del cuerpo B

b) El cambio de la cantidad de movimiento de cada cuerpo debido al choque

10.- Los coches A y B de la figura chocan bajo las siguientes condiciones:

a) En el primer choque, B está en reposo mientras que A se mueve hacia la derecha con una rapidez de 6m/s. Después del choque, A rebota con una rapidez de 2 m/s mientas que B se mueve hacia la derecha con una rapidez de 4m/s.

b) En el segundo choque, B está en reposo y A se carga con una masa de 3kg, dirigiéndose hacia B con una rapidez de 6 m/s. Después del choque, A queda en reposo y B se mueve hacia la derecha con una rapidez de 8m/s.

Determinar la masa de cada coche.

11.- Un bloque de masa 1kg y rapidez 10 m/s choca de manera perfectamente inelástica en dirección perpendicular con otro de 2kg de masa y rapidez 20m/s. Determinar:

a) La rapidez de cada bloque luego del choque

b) La variación de la energía cinética del sistema.

12.- Un cuerpo A de masa 2kg y velocidad $(6\vec{i})$ m/s choca contra otro B de masa 1kg que se encontraba en reposo. Si inmediatamente luego del choque el cuerpo A tiene una velocidad de $(4\ \vec{i})$ m/s. Hallar:

a) La velocidad del cuerpo B inmediatamente luego del choque

b)De qué tipo fue el choque: perfectamente elástico o perfectamente inelástico

c) La variación de la energía cinética del sistema debido al choque

13.- Un bloque A de 4kg se mueve con una velocidad de $(10\vec{j})$ m/s y choca frontalmente con un bloque B de 1kg, si luego del choque el bloque A queda en reposo determinar la velocidad que tenía el bloque B antes del choque, si:

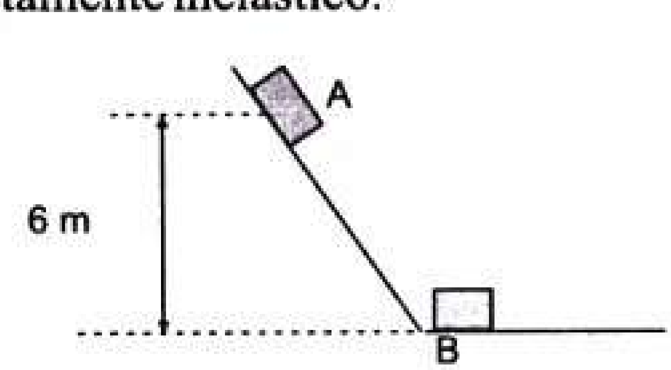
a) El choque es perfectamente elástico.

b) El choque es perfectamente inelástico.

14.- El cuerpo A parte del reposo desde una altura de 6m y resbala sobre la superficie de la pista sin fricción de la figura. En el inicio de la sección horizontal de la pista choca contra un cuerpo B de masa igual a la mitad de la de A que se encuentra en reposo. Calcular la velocidad de cada uno de los cuerpos luego del choque si:

a) El choque es perfectamente elástico

b) El choque es perfectamente inelástico.



15.- Un proyectil de 10g es disparado horizontalmente contra un bloque de madera de masa de 4kg que se encuentra en reposo sobre un plano horizontal. El proyectil penetra en el bloque a 500 m/s y sale a 200 m/s. el bloque se desliza 10cm antes de detenerse. Hallar:
a) La rapidez inicial del bloque luego del impacto
b) El tiempo que tardó en detenerse el bloque
c) El coeficiente de fricción entre el bloque y la superficie horizontal
d) La pérdida de energía cinética del proyectil.

4.6 EVALUACIÓN OBJETIVA

Completar:

1.- La cantidad de movimiento lineal de una partícula es una magnitud ....y su dirección es..a la velocidad de la misma.

2.- Si una partícula posee M.R.U., el impulso de la fuerza neta actuante sobre ésta es ....

3.- Si la variación de la cantidad de movimiento lineal de una partícula es constante en relación al tiempo, la fuerza neta que actúa sobre ésta..

4.- Si dos partículas están sujetas únicamente a su mutua interacción, la cantidad de movimiento lineal del sistema permanecerá ...., pero la cantidad de movimiento lineal individual de cada partícula será..

5.- Si sobre un sistema de partículas actúa una fuerza neta, la cantidad de movimiento lineal del sistema debe..

6.- La cantidad de movimiento lineal de un sistema de partículas no se altera debido a la acción de las fuerzas ....del sistema, sino por la acción de las fuerzas..................................a éste.

7.- En un sistema de partículas aisladas, lo que gana en cantidad de movimiento lineal una de las partículas, lo pierde...

8.- En todo tipo de choque se conserva..

9.- En los choques elásticos la energía cinética..

10.- Si dos partículas chocan inelásticamente, luego del choque las dos tendrán igual... y variará .... del sistema.

Escriba (V) verdadero o (F) falso:

1.- La cantidad de movimiento lineal de una partícula es paralela a su velocidad ....( )

2.- Una partícula con M.C.U mantiene constante su cantidad de movimiento lineal ....( )

3.- Si una partícula se desplaza por una trayectoria rectilinea, el impulso de la fuerza neta puede tener una dirección opuesta a la del desplazamiento ....( )

4.- La cantidad de movimiento lineal de una partícula con M.C.U.V. varía tanto en módulo como en dirección..( )

5.- La variación de la cantidad de movimiento lineal en relación al tiempo de un proyectil lanzado sobre la superficie de la Tierra es igual al peso de éste..( )

6.- Todas las partículas de un sistema aislado se desplazan siempre con velocidad constante..( )

7.- En un sistema aislado de dos partículas. lo que la una *gana* en cantidad de movimiento lineal, lo *pierde* la otra ....( )

8.- En los choques inelásticos se conserva la energía cinética del conjunto ....( )

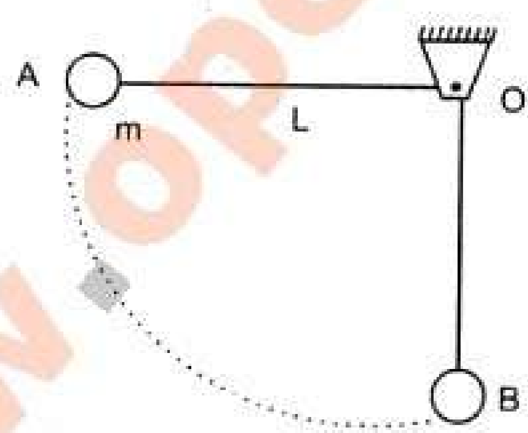
9.- En los choques inelásticos se conserva la cantidad de movimiento lineal del sistema..( )

10.- Si un cuerpo en movimiento choca contra otro libre que se encuentra en reposo, es posible que inmediatamente después del choque los dos queden en reposo..( )

Subrayar la respuesta correcta:

1.- En una partícula que posee M.C.U su cantidad de movimiento lineal:
a) permanece constante
b) permanece constante en módulo
c) varía en módulo y dirección
d) N.R.A.

2.- Una partícula de masa m está sujeta al extremo de una barra de longitud L y masa despreciable y privoteada en O, que puede girar libremente en el plano vertical.



2.1 El impulso recibido por la partícula entre A y B:
a) tiene una dirección vertical
b) tiene una dirección horizontal
c) es nulo
d) N.R.A.

2.2 La energía:
a) mecánica es máxima en la posición A
b) cinética en la posición B es mgL
c) cinética es constante entre A y B
d) N.R.A.

2.3 Si en el trayecto desde A hasta B la partícula emplea un tiempo t, el módulo de la fuerza promedio que actúa sobre ésta es:

a) mg

b) cero

c) $\frac{m}{t}\sqrt{2gL}$

D) N.R.A.

3.- En un sistema aislado de dos partículas sujetas a su interacción, se cumple que:

a) las partículas deben permanecer en reposo

b) la cantidad de movimiento lineal del sistema es constante

c) la cantidad de movimiento lineal de cada partícula es constante

d) N.R.A.

4.- Dos partículas A y B de masas m_A =4kg y m_B = 1kg respectivamente son abandonadas en reposo separados por una distancia $\overline{AB}$=100m. Si las partículas están aisladas del universo y sujetas sólo a su interacción gravitacional en algún momento se encontrarán en un punto C, tal que:

a) $\overline{AC} = 80m$

b) $\overline{AC} = 20m$

c) $\overline{AC} = 25m$

d) N.R.A.

5.- Una granada de masa m en reposo, aislada de cualquier interacción externa explota en tres fragmentos (A.B.C) de igual masa. Las velocidades iniciales de A y B son $\vec{V}_A = \vec{Vi}$ (m/s) y $\vec{V}_B = \vec{Vj}$ (m/s) respectivamente.

5.1 El fragmento C tendrá una velocidad inicial de:

a) $\vec{V}c = (V\vec{i} + V\vec{j})$ m/s

b) $\vec{Vc} = 2(-V\vec{i} - V\vec{j})$ m/s

c) $\vec{Vc} = (-V\vec{i} - V\vec{j})$ m/s

d) N.R.A.

5.2 La energía cinética inicial del fragmento C es:

a) $\frac{2}{3} mV^2$

b) $\frac{\sqrt{2}}{3} mV^2$

c) $-\frac{2}{3} mV^2$

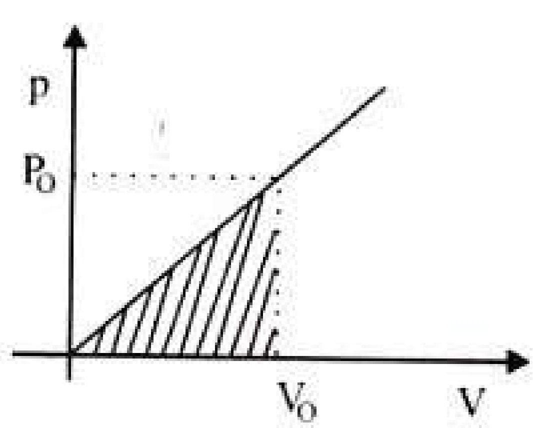
d) N.R.A.

6.- Un mecanismo fijo de un vagón de un tren, dispara un proyectil pesado en la misma dirección del movimiento del tren:
a) la velocidad del tren aumenta
b) la velocidad del tren disminuye
c) la velocidad del tren permanece constante
d) N.R.A.

7.- Si una partícula de masa m tiene una energía cinética Ec, el módulo de su cantidad de movimiento es:

a) $\sqrt{2mEc}$
b) 2mEc
c) 2Ec/m
d) N.R.A.

8.- En el siguiente diagrama se representa el valor de la componente de la cantidad de movimiento P de una partícula en función de su componente de velocidad V. La partícula inicialmente se encontraba en reposo. En el instante en que su velocidad es Vo, el área rayada representa:
a) el trabajo neto realizado sobre la partícula
b) el impulso sobre la partícula
c) la fuerza neta actuante sobre la partícula
d) N.R.A.

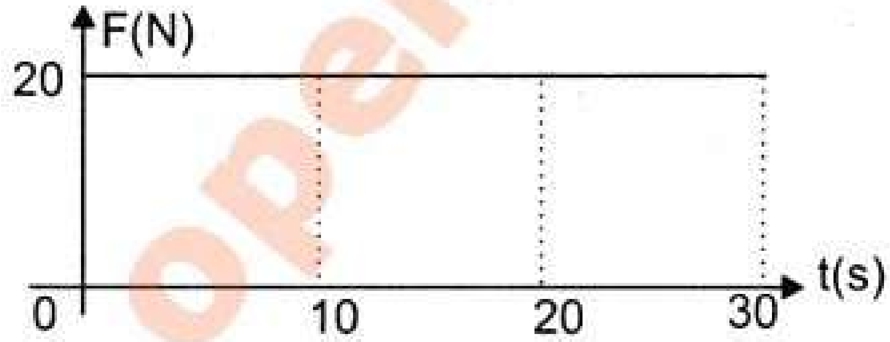


9.- Una pelota de masa m golpea contra una pared con una velocidad $V\vec{i}$ y rebota con una velocidad $-V\vec{i}$.

9.1 El impulso recibido por la pelota en el choque es:
a) $2mV\vec{i}$
b) $-2mV\vec{i}$
c) 0
d) N.R.A.

9.2 Si el tiempo de interacción entre la pelota y la pared fue t, la fuerza media que ejerce la pared sobre la pelota es:
a) 0
b) $(2mV/t)\vec{i}$
c) $-(2mV/t)\vec{i}$
d) N.R.A.

10.- Sobre una partícula que está inicialmente en reposo actúa una fuerza neta horizontal Fx registrada según el siguiente gráfico en función del tiempo:



Se cumple que:
a) Entre 0 y 30 s la partícula se desplaza con velocidad constante
b) Entre 0 y 30 s la distancia recorrida por la partícula es de 600 m
c) En t= 20 s la cantidad de movimiento lineal de la partícula es de 400kg.m/s
d) N.R.A.

11.- Si la energía mecánica total de una partícula es cero, su cantidad de movimiento lineal:
a) es necesariamente igual a cero
b) puede ser diferente de cero
c) es constante
d) N.R.A.

12.- En todo choque:
a) se conserva la energía cinética
b) se conserva la cantidad de movimiento lineal
c) se conserva la energía mecánica
d) N.R.A.

13.- En los choques elásticos:
a) se conserva la energía mecánica total del sistema
b) se conserva la cantidad de movimiento lineal y la energía cinética
c) se conserva únicamente la energía cinética
d) N.R.A.

14.- En los choques inelásticos:
a) se conserva la energía cinética y la cantidad de movimiento lineal
b) se conserva únicamente la cantidad de movimiento lineal
c) se conserva únicamente la energía cinética
d) N.R.A.

15.- Al chocar dos objetos, estando el uno inicialmente en reposo:
a) es posible que los dos queden en reposo después del choque
b) es posible que uno de los dos quede en reposo después del choque
c) se conserva únicamente la energía cinética
d) N.R.A.

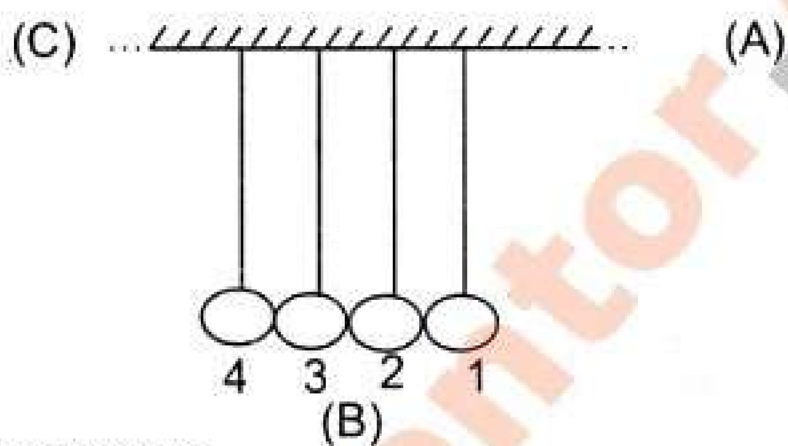
16.- Cuando chocan frontal e inelásticamente un auto pequeño y un camión grande que se movían el uno hacia el otro, se cumple que:
a) la variación de la energía cinética del auto es mayor que la del camión
b) la variación de la energía cinética del camión es mayor que la del auto
c) el auto y el camión experimentan la misma variación de energía cinética
d) N.R.A.

17.- Cuando dos cuerpos de igual masa y rapidez se mueven sobre una recta en sentidos opuestos y chocan frontal e inelásticamente, se cumple que.
a) disminuye la cantidad de movimiento lineal del sistema
b) se pierde toda la energía cinética del sistema luego del choque
c) se conserva la energía cinética del sistema luego del choque
d) N.R.A.

18.- Una esfera A choca con una velocidad $\vec{V}$ contra otra esfera igual B que se encuentra en reposo. Las velocidades de A y B inmediatamente del choque

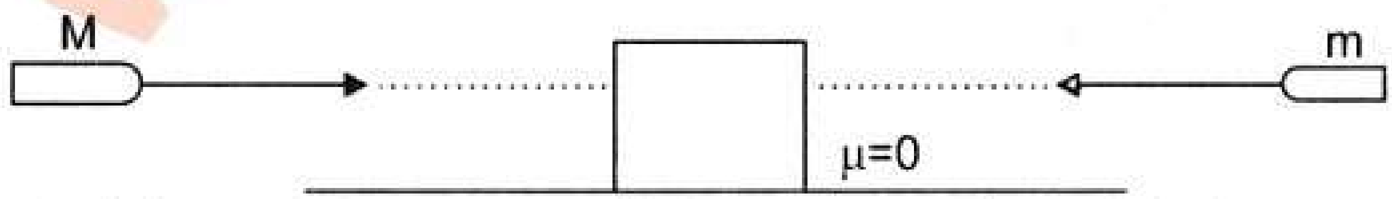
son respectivamente:
a) $-\vec{V}:0$
b) $\vec{V}/2:\vec{V}/2$
c) $-\vec{V}/2:3\vec{V}/2$
d) N.R.A.

19.- El sistema de la figura está constituido por cuatro péndulos idénticos de cuerdas delgadas, de masa despreciable y masas suspendidas, esféricas, sólidas, perfectamente elásticas. El sistema está sujeto a la acción de la gravedad. A partir del reposo en B, la esfera (1) es llevada a la posición A y abandonada desde el reposo, chocando posteriormente con la esfera (2).



Se puede afirmar que:
a) las esferas 2,3 y 4 se mueven juntas hacia la izquierda
b) las esferas 1,2 y 3 permanecen en la posición B y la esfera 4 es impulsada hasta alcanzar el punto C.
c) las esferas 2,3 y4 se mueven hacia la izquierda y la esfera 1 lo hace hacia la derecha.
d) N.R.A.

20.- Dos proyectiles de masas M y m (M>m), que poseen igual energía cinética, se mueven uno hacia el otro sobre una recta en sentidos opuestos impactan simultáneamente sobre un bloque sólido que se encuentran en reposo como se indica en la figura. Si los proyectiles penetran y se detienen en el bloque.



a) el sistema (bloque-proyectiles) no se mueve luego de los impactos
b) el sistema se mueve hacia la izquierda
c) el sistema se mueve hacia la derecha
d) N.R.A.

5. MOVIMIENTO ARMONICO SIMPLE

En la naturaleza hay muchos movimientos que se repiten a intervalos iguales de tiempo, estos son los llamados movimientos periódicos

Si la partícula animada con movimiento periódico se mueve alternativamente en un sentido y en otro sobre la misma trayectoria, su movimiento se denomina oscilatorio o vibratorio.

Ejemplos típicos de este tipo de movimiento son realizados por los péndulos, los sistemas masa-resorte en movimiento, las vibraciones de las cuerdas, etc.

En realidad se observa dos tipos de movimientos oscilatorios: amortiguados y forzados.

Movimiento oscilatorio (vibratorio amortiguado). Un sistema con este movimiento no se mueve entre limite fijos exactos, puesto que las fuerzas de rozamiento van "disipando" la energía del sistema, atenuando la vibración hasta hacerla desaparecer.
Por ejemplo una cuerda de guitarra, que luego de ser puesta en vibración va atenuándose hasta desaparecer, o el de un péndulo que igualmente suspende su oscilación un tiempo después de haber sido abandonado en movimiento.

Movimiento oscilatorio (vibratorio forzado): un sistema con este movimiento perdura, pero para esto es necesario comunicar al sistema en oscilación una cierta energía que compense la "disipada" por las fuerzas de rozamiento y anule su efecto de amortiguamiento.

Por ejemplo la oscilación del balancín de un reloj, esta se mantiene mientras se le entregue energía, en este caso a través de un resorte en espiral (pelo), el mismo que almacena energía cuando el reloj es dado cuerda.

En fisica se ha idealizado un tipo de movimiento oscilatorio, en el que se considera que sobre el sistema no existe la acción de las fuerzas de rozamiento es decir que no existe disipación de energía y que el movimiento se mantiene invariable, sin necesidad de comunicarle energía exterior a este.

Este movimiento se llama **Movimiento Armónico Simple** (MAS). Es muy importante porque constituye una buena aproximación del análisis de muchos movimientos oscilatorios y además es el más fácil de ser descrito matemáticamente.

Las condiciones generales que debe cumplir un movimiento oscilatorio para considerarlo armónico simple son:

Dinámica: que la fuerza neta que actúa sobre la partícula sea directamente proporcional al desplazamiento y que este dirigida siempre hacia la posición de equilibrio (F=-kx)

Geométrica: que el desplazamiento sea entre limites fijos y equidistantes de la posición de equilibrio, manteniendo siempre la misma trayectoria.

Estas condiciones básicas, si bien definen la existencia del movimiento, no definen absolutamente las caracteristicas del movimiento en un instante dado, pues en ellos influyen además las condiciones iniciales del movimiento, como la posición y la velocidad inicial.

5.1 DEFINICIONES

Posición de Equilibrio (P.Eq.): es la posición donde la fuerza neta que actúa sobre la partícula produciendo las oscilaciones, es nula ($\Sigma F=0$). Esta posición se caracteriza geométricamente por encontrarse en el centro de la trayectoria del MAS.

Ejemplo: determinar cual es la distancia "z" que se deforma el resorte de longitud natural "Lo" (sin deformar) y constante de recuperación elástica "k", hasta llegar a la posición de equilibrio, cuando se ha sujetado un bloque de masa "m" en su extremo

a) Vibración horizontal:

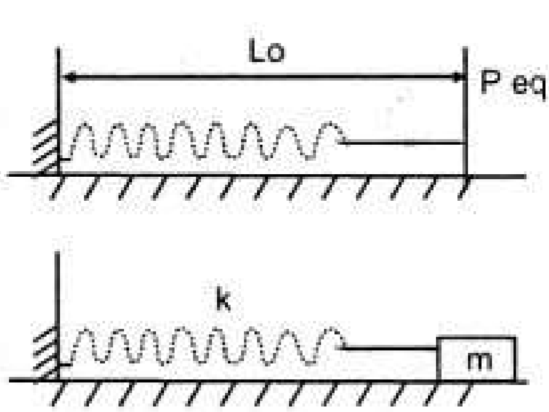
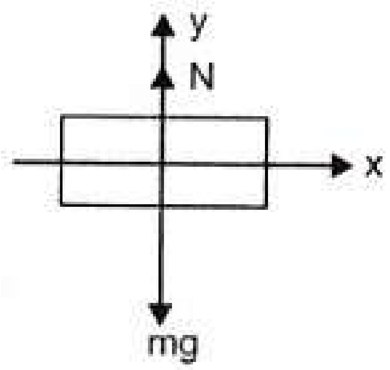


Diagrama del cuerpo libre para "m" en la posición de equilibrio ($\Sigma F=0$):



$\Sigma Fx = 0$

$\Sigma Fy = 0$

$N = mg$

Si no hay fuerzas en la dirección horizontal del movimiento, no hay deformación en el resorte y z=0.

b) Vibración vertical:

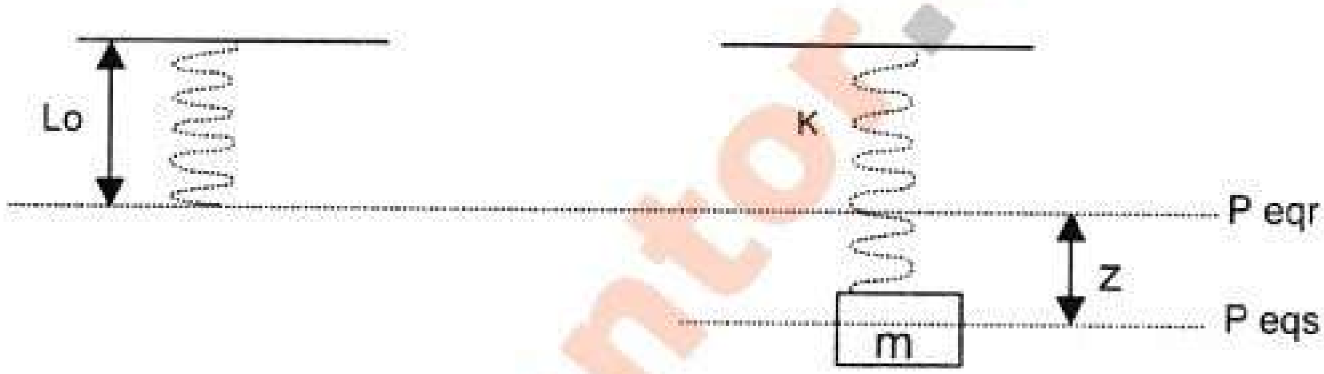
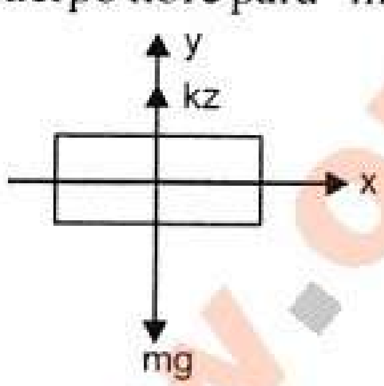


Diagrama del cuerpo libre para "m" en la posición de equilibrio ($\Sigma F=0$)



$\Sigma Fy = 0$

$kz - mg = 0$

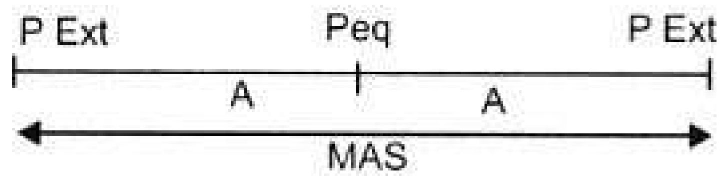
$$z = \frac{mg}{k}$$

Posición (x): es la ubicación que tiene la partícula en un instante de tiempo "t" respecto a un sistema de referencia, cuyo origen debe coincidir con la posición de equilibrio.

En el presente texto se considerara a la posición con signo positivo, cuando la partícula se encuentra a la derecha de la posición de equilibrio si la vibración es horizontal o sobre la posición de equilibrio si la vibración es vertical. En sentido opuesto será negativa.

Amplitud (A) : es la distancia máxima que existe entre la posición de equilibrio y la posición de la partícula en su vibración ($A = X_{max}$). En esta posición la fuerza neta que actúa sobre la partícula es máxima.

Geométricamente la amplitud es la distancia entre la posición de equilibrio y las posiciones extremas.



Oscilación o ciclo: es el camino que recorre la partícula hasta que el estado de movimiento se repita exactamente en desplazamiento velocidad y aceleración.

Período (T): es el tiempo que utiliza la partícula en una oscilación completa (ciclo).

$T=\dfrac{\Delta t}{n}$. donde "n" es el número de oscilaciones **(5.1.1)**

$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$, donde "ω" es la frecuencia angular del MAS **(5.1.2)**

Frecuencia (f): es el número de oscilación completas que realiza la partícula en la unidad de tiempo.

$$f=\frac{n}{\Delta t} \quad \textbf{(5.1.3)}$$

La frecuencia es el recíproco del periodo:

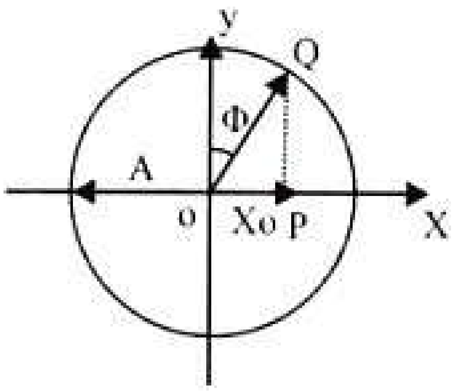
$$f=\frac{1}{T} \quad \textbf{(5.1.4)}$$

5.2 DESCRIPCIÓN CINEMATICA DEL MAS

Análisis Geométrico del MAS: es la relación del MCU con el MAS, porque la proyección de un MCU sobre cualquier recta da origen a un MAS

En la siguiente figura, Q es un punto que se mueve alrededor de un circulo de radio A, con una velocidad angular constante ω expresada en rad/s, P es la proyección ortogonal de Q sobre el diámetro horizontal (eje x)

Es importante aclarar que el punto Q es un punto de referencia que se mueve en un círculo igualmente de referencia.



$$\text{Sen}\,\Phi = \frac{x_o}{A}$$

$$x_o = \mp A\,.\,\text{sen}\,\Phi \qquad \textbf{(5.2.1)}$$

Φ es el ángulo entre el radio OQ y el eje de referencia Y en el tiempo t = 0 y se denomina fase inicial del movimiento. Es un ángulo ajustable que sirve para establecer la correspondencia inicial de $x(x_o)$, para t = 0

x_o es la desviación del cuerpo de su posición de equilibrio para t = 0

Se confiere el signo positivo a x_o, cuando la partícula se encuentra a la derecha de la posición de equilibrio y el signo negativo cuando esta a la izquierda.

Al ir girando el punto de referencia Q, su proyección P tiene un movimiento de vaivén sobre el diámetro horizontal, alrededor del punto central o, el mismo que representa la posición de equilibrio.

Luego de un tiempo cualquiera t, (ω.t + Φ) es el ángulo entre OQ y el eje de referencia Y, y se denomina fase del movimiento.

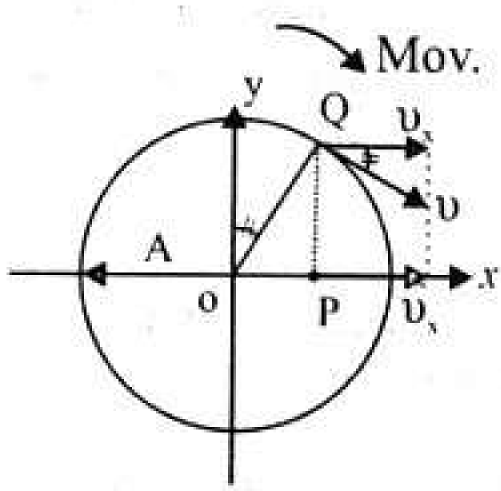
$$Sen\,(\omega t + \Phi) = \frac{x}{A}$$

$$x = \pm A.\,sen\,(\omega t + \Phi) \qquad \textbf{(5.2.2)}$$

ω es la frecuencia angular del MAS y es igual a la velocidad angular constante del punto de referencia Q.

La componente del desplazamiento de Q sobre el eje de las X, representa la posición de P. Se confiere el signo positivo a la posición, cuando la partícula se encuentra a la derecha de la posición de equilibrio y el negativo cuando esta a la izquierda.

La velocidad tangencial del punto de referencia Q, tiene como magnitud $v = \omega.R$, por lo que la componente sobre el eje de las X, representa la velocidad de P.



$$\cos(\omega t + \Phi) = \frac{\upsilon_x}{\upsilon}$$

$$\upsilon_x = \pm \upsilon.\cos(\omega.t + \Phi)$$

$$\upsilon_x = \pm \omega.A.\cos(\omega.t + \Phi) \quad \textbf{(5.2.3)}$$

El signo de la velocidad es positivo, cuando la partícula se mueve hacia la derecha y negativo si lo hace a la izquierda.
La velocidad en función de la posición es: (figura anterior)

$$\cos(\omega.t + \Phi) = \frac{QP}{A}$$

en el triángulo OQP:

$$A.\cos(\omega.t + \Phi) = QP \quad \textbf{(1)}$$

$$QP = \sqrt{A^2 - x^2} \quad \textbf{(2)}$$

Reemplazando (2) en (1):

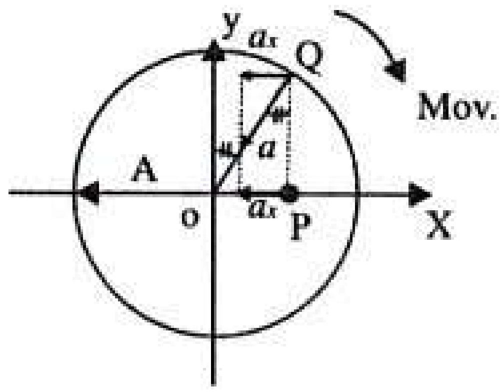
$$A.\cos(\omega.t + \Phi) = \sqrt{A^2 - x^2} \quad \textbf{(3)}$$

Reemplazando (3) en (5.2.3):

$$\upsilon_x = \pm \omega.A.\cos(\omega.t + \Phi)$$

$$\upsilon_x = \pm \omega\sqrt{A^2 - x^2}$$

La aceleración del punto Q en el MCU es la aceleración centrípeta, cuyo módulo es $a = \omega^2.R$, por lo que la componente sobre el eje X representa la aceleración de P:



$$\operatorname{sen}(\omega t+\Phi)=\frac{-a_x}{a}$$

$$a_x=-a.\operatorname{sen}(\omega t+\Phi)$$

$$a_x=-\omega^2.A.\operatorname{sen}(\omega t+\Phi) \quad \textbf{(5.2.5)}$$

$$a_x=-\omega^2.x \quad \textbf{(5.2.6)}$$

En este caso se utiliza exclusivamente el signo negativo, porque siempre la aceleración es de sentido opuesto a la posición de la partícula.

De las relaciones establecidas para la posición, velocidad y aceleración, se concluye:

a) Se obtiene la posición máxima, cuando la rapidez es cero y la aceleración es máxima.
b) Se alcanza la posición de equilibrio (x=0) cuando la rapidez es máxima y la aceleración es cero.
c) La aceleración es siempre proporcional y opuesta a la posición
d) La posición inicial (x_o) y la rapidez inicial (υ_o) son condiciones iniciales del movimiento, independientemente de la frecuencia del movimiento.

5.3 DETERMINACIÓN DEL PERIODO (T)

De acuerdo a la segunda Ley de Newton:

F= m.a, como $a=-\omega^2.x$, entonces:

$F=-m.\omega^2.x$, pero también sabemos que $F=-k.x$, por lo que:

$-k.x=-m.\omega^2.x$

$$k=m.\omega^2 \Rightarrow \omega=\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \textbf{(5.3.1)}$$

Reemplazando en (5.1.2) tenemos:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{k}{m}}},$$ de donde:

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{y} \quad \textbf{(5.3.2)}$$

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \textbf{(5.3.3)}$$

De esto se puede concluir, que el período de la vibración se determina totalmente a partir de las propiedades del sistema vibrante y no depende de las condiciones exteriores iniciales que provocaron el movimiento.

Para un mismo sistema (m.k) constantes se puede tener movimientos armónicos simples con diferentes amplitudes y diferentes ángulos de fase, sin que esto altere el valor de su Período (T), de su frecuencia de oscilación (f) y de su frecuencia angular de movimiento (ω)

5.4 LA ENERGÍA EN EL MAS

Como la fuerza que actúa sobre una partícula que vibra con MAS depende de la posición (F=-kx), esta será una fuerza conservativa, que mantiene constante la energía mecánica total del sistema.

$$Em = Ec + Ep = cte \qquad \textbf{(5.4.1)}$$

La energía cinética en un instante cualquiera es:

$Ec = ½m.\upsilon^2$, donde $\upsilon = \pm\, \omega\,.\,A\,.\cos(\omega.t+\Phi)$ y $m = \dfrac{k}{\omega^2}$ de (5.3.1)

$$Ec = 1/2\left[\frac{k}{\omega^2}\right]\omega^2.A^2.\cos^2(\omega.t+\Phi)$$

$$Ec = 1/2\,k.A^2.\cos^2(\omega.t+\Phi)$$

como $\cos^2(\omega.t+\Phi)_{máx} = 1$, tenemos **(5.4.2)**

$$Ec_{máx} = ½\,m.\,\omega^2.A^2 = ½k.A^2 \qquad \textbf{(5.4.3)}$$

Durante el movimiento, la energía cinética varia entre cero y el valor máximo indicado.

La energía potencial en un instante cualquiera es:

$Ep = ½\,k.x^2$, donde $x = \pm\, A.sen\,(\omega.t+\Phi)$

$$Ep = ½\,k\,[A^2.sen^2(\omega.t+\Phi)]$$

$Ep = \frac{1}{2}k.A^2.sen^2\ (\omega.t + \Phi)$ **(5.4.4)**

Como $sen^2(\omega.t + \Phi)_{máx} = 1$, tenemos:

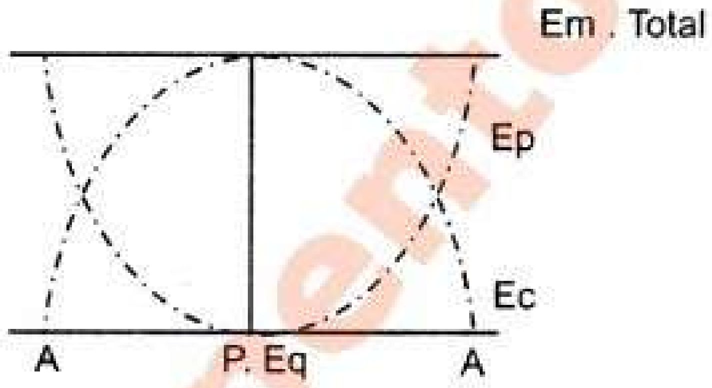
$Ep_{máx} = \frac{1}{2}k.A^2$ **(5.4.5)**

Durante el movimiento la energía potencial varia entre cero y el valor máximo indicado.

En el transcurso de la oscilación hay un continuo intercambio de energía potencial y cinética.

Cuando la partícula se aleja de la posición de equilibrio, la energía potencial incrementa su valor, a expensas de una disminución de la energía cinética y viceversa

Esto se puede ver mas claramente en el siguiente gráfico.



Generalizando se tendrá que:

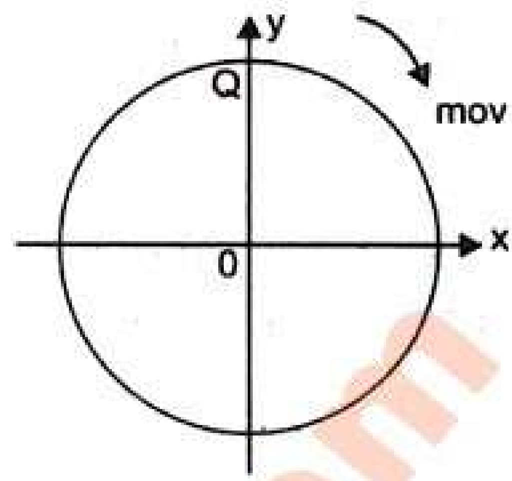
$Em = \frac{1}{2}m.\upsilon_x^2 + \frac{1}{2}k.x^2 = \frac{1}{2}m.\upsilon_{máx}^2 = \frac{1}{2}k.A^2$ **(5.4.6)**

Donde υ_x es la velocidad de la partícula en la posición X y $\upsilon_{máx}$ es la velocidad de la partícula en la posición de equilibrio ($\upsilon_{máx} = \omega.A$)

Ejemplos:

1.- La ecuación del MAS de una partícula Q de 20g es X= 5sen (3t) cm.Determinar
   a) La amplitud del movimiento
   b) La frecuencia angular de oscilación
   c) La frecuencia de oscilación
   d) La constante (k) de recuperación del movimiento

e) La posición de partícula en t = 2s
f) La fuerza recuperadora en t = 2s
g) La energía potencial en t = 2s
h) La velocidad en la partícula en t = 2s
i) La energía cinética en t = 2s
j) La energía mecánica total en t = 2s
k) La energía mecánica total en t = 3s



$x = +A \,.\, \text{Sen}(\omega \,.\, t + \Phi)$
$x = 5 \,.\, \text{Sen}(3t)$

a) A = 5 cm.
b) $\omega = 3$ rad/s

c) $T = \dfrac{2\pi}{\omega} \Rightarrow f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{3\ rad/s}{2\pi} = 0{,}48\ s^{-1}$

d) $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}} \Rightarrow k = 4\pi^2 f^2 m$

$k = 4\pi^2(0{,}48 s^{-1})^2\,(0{,}02\ kg)(m/m)$
$k = 0{,}18\ (N/m)$

e) $x = 5 \,.\, \text{sen}(3t)$ cm
$x = 5 \,.\, \text{sen}(3rad/s.2s)$ cm
$x = 5.\ \text{sen}(6rad)$ cm
$x = 5 \,.\, \text{sen}(343{,}77°)$
$x = -1{,}4$ cm

f) $Fr = -kx$
$Fr = -0{,}18\ (N/m)(-0{,}014\ m)$
$Fr = 2{,}52 \times 10^{-3}\ (N)$

g) $Ep = \frac{1}{2} k \,.\, x^2$
$Ep = \frac{1}{2}(0{,}18\ N/m)(-0{,}014 m)^2$
$Ep = 1{,}76 \times 10^{-5}\ (J)$

h) $\upsilon = \pm\, \omega.A.\cos(\omega t)$
$\upsilon = 3\ rad/s \,.\, 5\ cm \,.\, \cos(3t)$
$\upsilon = 15.\ \cos(6rad)\ cm/s = 14{,}4\ cm/s$

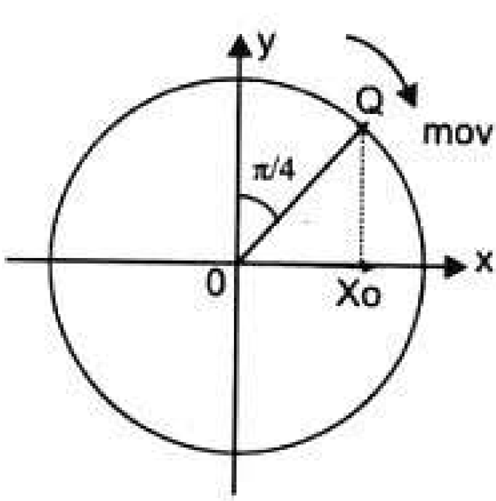
i) $Ec = \frac{1}{2} m . \upsilon^2$
$Ec = \frac{1}{2} (0{,}02\ kg)(0{,}144\ m/s)^2$
$Ec = 2{,}07 \times 10^{-4}\ (J)$

j) $E_M = Ep + Ec$
$E_M = 1{,}76 \times 10^{-5}\ (J) + 2{,}07 \times 10^{-4}\ (J)$
$E_M = 2{,}25 \times 10^{-4}\ (J)$

k) $x = 5 . sen\ (3t)\ cm$ $\qquad$ $\upsilon = 15 . cos\ (3t)\ cm/s$
$x = 5 . sen (9\ rad)\ cm$ $\qquad$ $\upsilon = 15 . cos (9 rad) cm/s$
$x = 2{,}06\ cm$ $\qquad$ $\upsilon = -13{,}67\ cm/s$

$E_M = Ep + Ec$
$E_M = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m . \upsilon^2$
$E_M = \frac{1}{2} (0{,}18\ N/m)(0{,}0206\ m)^2 + \frac{1}{2} (0{,}02\ kg)(-0{,}1367\ m/s)^2$
$E_M = 3{,}82 \times 10^{-5}\ (J) + 1{,}87 \times 10^{-4} (J)$
$E_M = 2{,}25 \times 10^{-4}\ (J)$

2.- Una partícula Q de 20g oscila con MAS. Si la ecuación de la posición en función del tiempo es $x = 2\ sen\ (3/2\ t + \pi/4)$ cm. Determinar:
a) La amplitud del movimiento
b) La frecuencia angular de oscilación
c) El ángulo de fase inicial
d) La posición de la partícula para t=0 s y t=3 s
e) El período de oscilación
f) La constante (k) de oscilación de la partícula
g) La posición de la partícula en t= 2s
h) la fuerza recuperadora en t=2s
i) La energía potencial en t=2s
j) La velocidad de la partícula en t=4 s
k) La energía cinética en t=4 s
l) La aceleración de la partícula en t=2 s



$x = \pm A . sen(\omega . t + \Phi)$
$x = 2 . sen\ (3/2t + \pi/4) cm$

a) A= 2 cm.

b) $\omega = 3/2 \text{ rad/s}$

c) $\Phi = \pi/4$

d) $x_0 = 2.\text{sen}(3/2t + \pi/4)\text{ cm}$

$x_0 = 2 \,.\, \text{sen}(\pi/4)\text{ cm}$

$x_0 = 1{,}41\text{ cm}$

$x = 2 \,.\, \text{sen}(3/2t + \pi/4)\text{ cm}$

$x_3 = 2 \,.\, \text{sen}(3/2.3 + \pi/4)\text{ cm}$

$x_3 = 2 \,.\, \text{sen}(4{,}5 + \pi/4)\text{ cm}$

$x_3 = -1{,}68\text{ cm}$

e) $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

$T = \dfrac{2\pi}{(3/2)\text{ rad / s}}$

$T = 4{,}19\text{ s}$

f) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

$k = \dfrac{4\pi^2 m}{T^2}$

$k = \dfrac{4\pi^2 (0{,}02\text{ kg})}{(4{,}19\text{s})^2}$

$k = 0{,}045\text{ (N/m)}$

g) $x = 2.\text{sen}(3/2t + \pi/4)\text{ cm}$

$x_2 = 2 \,.\, \text{sen}(3/2.2 + \pi/4)\text{ cm}$

$x_2 = 2 \,.\, \text{sen}(3 + \pi/4)\text{ cm}$

$x_2 = -1{,}2\text{ cm}$

h) $Fr = -kx$

$Fr = -(0{,}045)\text{ N/m }(-0{,}012)\text{ m}$

$Fr = 5{,}4 \times 10^{-4}\text{ (N)}$

i) $Ep = \frac{1}{2} k.x^2$

$Ep = \frac{1}{2}(0{,}045)\text{ N/m }(0{,}012\text{m})^2$

$Ep = 3{,}24 \times 10^{-6}\text{ (J)}$

j) $\upsilon = +\,\omega.A.\cos(\omega.t + \Phi)$

$\upsilon = 3/2\,(0{,}02).\cos(6 + \pi/4)$

$\upsilon = 0{,}026\text{ m/s}$

k) $Ec = \frac{1}{2} m.\upsilon^2$

$Ec = \frac{1}{2}(0{,}02\text{ kg})(0{,}026\text{ m/s})^2$

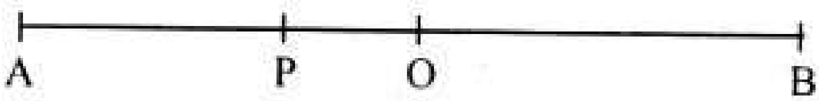
$Ec = 6{,}76 \times 10^{-6}\text{(J)}$

l) $a = -\omega^2 x$

$a = -(3/2)^2 (0{,}012)$

$a = -0{,}027 \text{ m/s}^2$

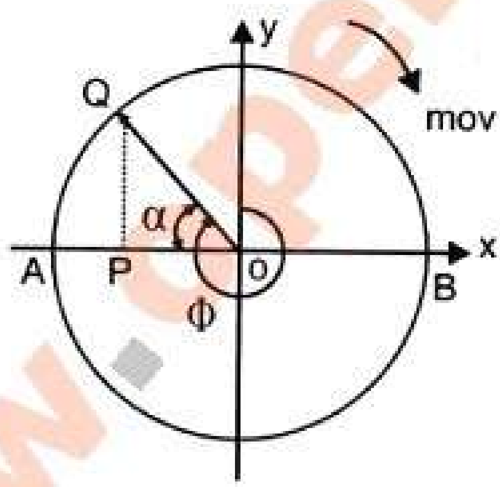
3.- Una partícula Q de 25kg vibra horizontalmente con MAS de acuerdo a las condiciones indicadas en la figura.



OA = OB = 15 cm
OP = 1/3 OA
T = 1 s

P es la posición de la partícula en t=0, donde empieza a moverse hacia el punto O. Determinar:

a) Las ecuaciones del movimiento en función del tiempo t
b) Los puntos en los cuales se tiene $a_{máx}$, $V_{máx}$ y F_{max}
c) El tiempo mínimo en que se consigue esos valores máximos
d) La energía mecánica total en el punto A y en un punto R ubicado a ¼ del recorrido OB
e) La fuerza recuperadora en P



Calculamos ω:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{1\ s}$$

$$\omega = 2\pi \text{ rad/s}$$

Calculamos Φ:

$$\cos\alpha = \frac{OP}{OQ} = \frac{5\ cm}{15\ cm}$$

$$\alpha = 70{,}53^\circ$$

$$\Phi = 270^\circ + 70{,}53^\circ = 340{,}53^\circ$$

$\Phi = 5{,}94$ rad

a) Posición:

$x = \pm A.\text{sen}(\omega.t + \Phi)$

$x = \pm 15.\text{sen}(2\pi t + 5{,}94)$ cm

Velocidad:

$\upsilon = \pm A\omega.\cos(\omega.t + \Phi)$

$\upsilon = \pm 30\pi.\cos(2\pi t + 5{,}94)$ cm/s

Aceleración:

$a = \mp A\omega^2 .\text{sen}(\omega.t + \Phi)$

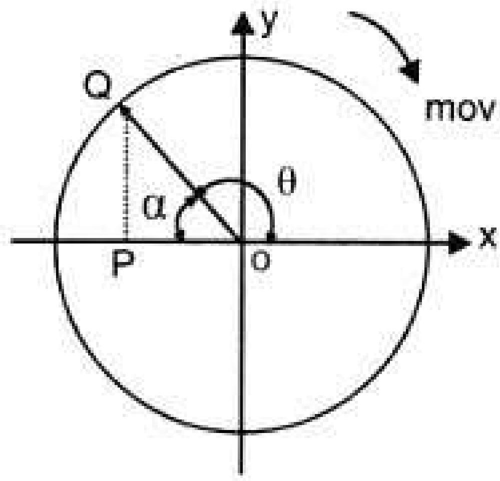
$a = \mp 60\pi^2.\text{sen}(2\pi t + 5{,}94)$ cm/s^2

b) $a_{máx}$ en los puntos A y B, cuando $x = \pm A$
$F_{máx}$ en los puntos A y B, cuando $x = \pm A$
$\upsilon_{máx}$ en el punto O, cuando $x = 0$

c) El tiempo mínimo para alcanzar la $a_{máx}$ y $F_{máx}$ es cuando $x = A$:
$\theta = \omega.t$, donde $\theta = (90^\circ - 70{,}53^\circ) + 90^\circ = 109{,}47^\circ = 1{,}91$ rad

$$t = \frac{\theta}{\omega} = \frac{1{,}91 \text{ rad}}{2\pi\text{rad / s}}$$

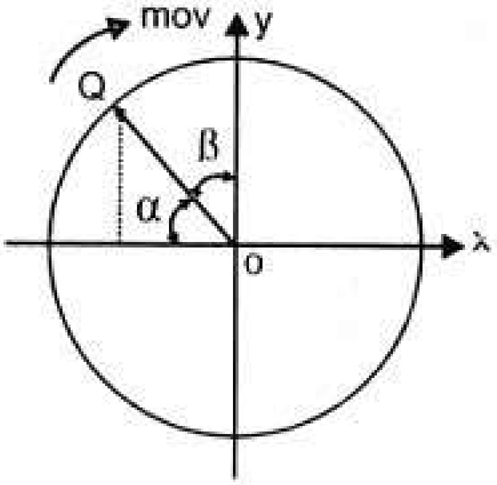
$t = 0{,}3$ s



El tiempo mínimo para alcanzar la υ_{max} es cuando $x = 0$
$\beta = \omega.t$, donde $\beta = 90^\circ - 70{,}53^\circ = 19{,}47^\circ = 0{,}34$ rad

$$t = \frac{\beta}{\omega} = \frac{0{,}34 \text{ rad}}{2\pi\text{rad / s}}$$

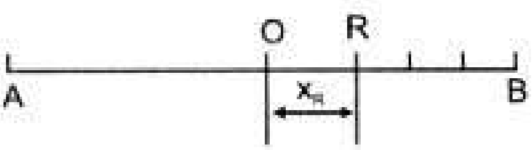
$t = 0{,}05$ s



d) La energía mecánica total en el punto A es:

$Em_A = \cancel{Epg}^{0} + Epe + \cancel{Ec}^{0}$
$Em_A = \frac{1}{2} kA^2$
$Em_A = \frac{1}{2}(986{,}96)N/m\,(0{,}15m)^2$
$Em_A = 11{,}1\ (J)$
Calculamos k:
$k = m.\omega^2$
$k = (25kg)(4\pi)\ rad^2/s^2\ .\ (N/m)$
$k = 986{,}96\ (N/m)$

La energía mecánica total en el punto R es:



$X_R = 1/4\ OB = 3{,}75\ cm$

Calculamos υ_R:

$\upsilon_R = \omega\sqrt{A^2 - X^2_R}$

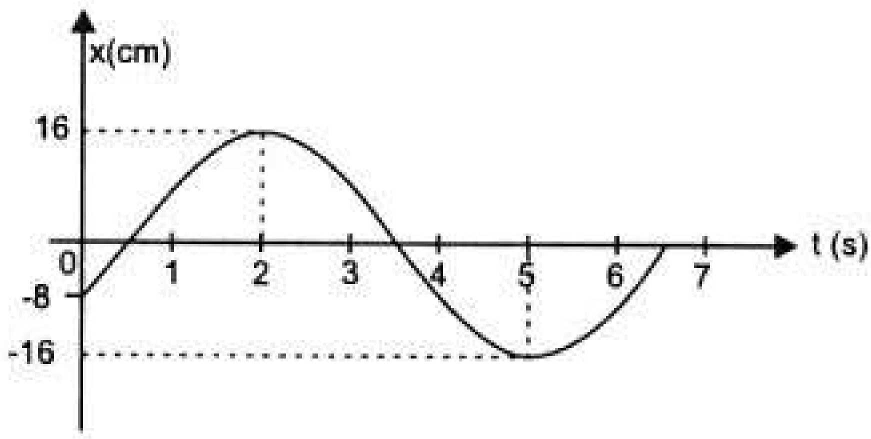
$\upsilon_R = 2\pi\ rad/s\ \sqrt{(0{,}15m)^2 - (0{,}0375m)^2}$

$\upsilon_R = 0{,}913\ m/s$

$Em_R = Ep_e + Ec$
$Em_R = \frac{1}{2}k.x^2_R + \frac{1}{2}\,m.\upsilon_R^2$
$Em_R = \frac{1}{2}(986{,}96)N/m\,(0{,}0375m)^2 + \frac{1}{2}(25\ kg)(0{,}913\ m/s)^2$
$Em_R = 0{,}69\ (J) + 10{,}41\ (J)$
$Em_R = 11{,}1\ (J)$, como el sistema es conservativo, la
$Em_A = Em_R$

e) $Fp = -k.x_P$, como $k = 986{,}96(N/m)$ y $x_P = -5\ cm$
$Fp = -(986{,}96)N/m(-0{,}05m)$
$Fp = 49{,}35\ (N)$

4.- La gráfica x=f(t) de una partícula de 0.8kg que oscila con MAS es:



Determinar:
a) La amplitud del movimiento
b) El período
c) La frecuencia angular de oscilación
d) El ángulo de fase inicial
e) Las ecuaciones del movimiento en función del tiempo
f) Las gráficas v= f(t) y a=f(t)
g) El tiempo mínimo para alcanzar la $a_{máx}$ y $\upsilon_{máx}$
h) La posición de la partícula en t=3s
i) La velocidad de la partícula en t=4s
j) La aceleración de la partícula en t=6.5s

a) En el gráfico x= f(t) la máxima posición es 16 cm, por lo tanto:
A= 16 cm
b) El período es el tiempo en el cual el movimiento del cuerpo se repite completamente
T= 6s

c) $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{6s} = \dfrac{\pi}{3}$ rad / s

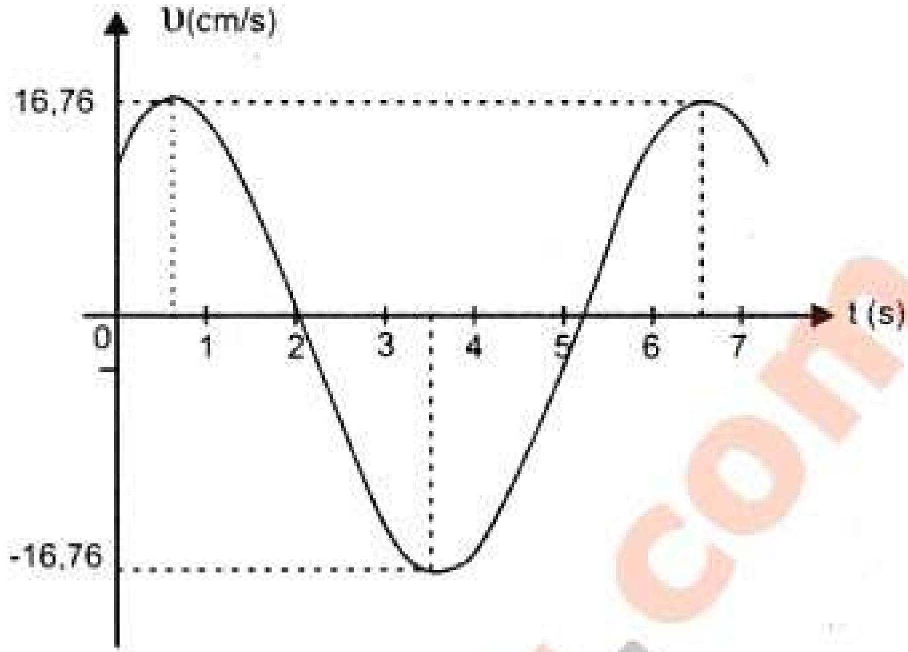
d) $\text{sen}\Phi = \dfrac{X_0}{A} = \dfrac{-8 \text{ cm}}{16 \text{ cm}} \Rightarrow \Phi = -30° = -\pi/6$ rad

e) $x = \pm A.\text{sen}(\omega.t+\Phi)$ $\quad \upsilon = \pm A\omega.\cos(\omega t+\Phi)$
$x = \pm 16.\text{sen}(\pi/3t - \pi/6)$ cm $\quad \upsilon = \pm 16\pi/3.\cos(\pi/3t - \pi/6)$ cm/s

$a = \mp A\omega^2.\text{sen}(\omega.t+\Phi)$
$a = \mp 16\pi^2/9.\text{sen}(\pi/3t - \pi/6)$ cm/s^2

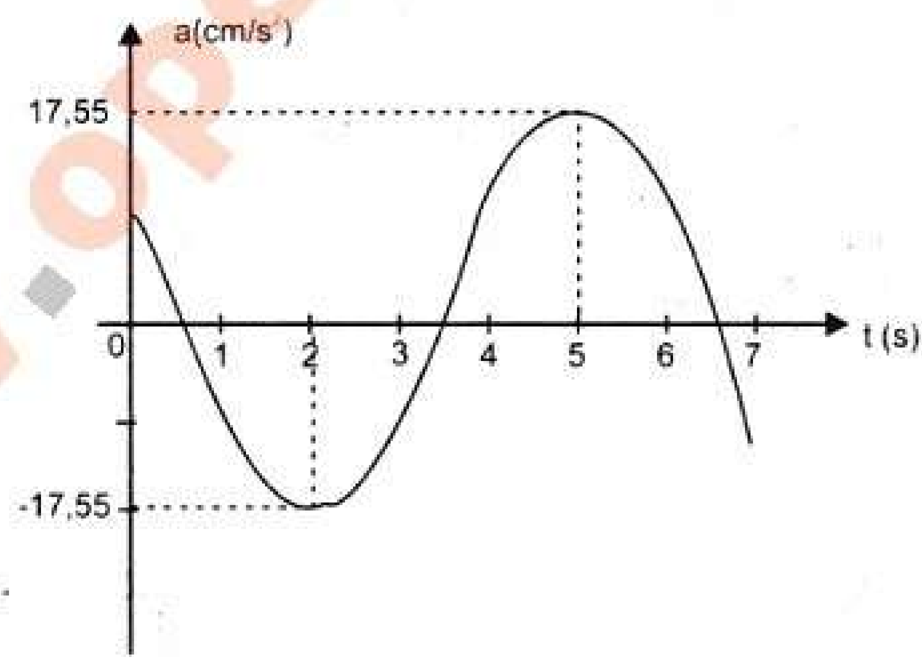
f) $\upsilon = \pm\, 16\pi/3 . \cos(\pi/3t - \pi/6)$ cm/s

t(s)	υ(cm/s)
0	14,51
0,5	16,76
1,0	14,51
1,5	8,38
2,0	0
2,5	-8,38
3,0	-14,51
3,5	-16,76
4,0	-14,51
4,5	-8,38
5,0	0
5,5	8,36
6,0	14,51
6,5	16,76



$a = -16\pi^2/9 . \text{sen}(\pi/3t - \pi/6)$ cm/s^2

t(s)	a(cm/s^2)
0	8,77
0,5	0
1,0	-8,77
1,5	-15,20
2,0	-17,55
2,5	-15,20
3,0	-8,77
3,5	0
4,0	8,77
4,5	15,20
5,0	17,55
5,5	15,20
6,0	8,77
6,5	0



g) En el gráfico a = f(t) se observa que la partida demora 2s en alcanzar la aceleración máxima.

En el gráfico υ= f(t) se observa que la partícula demora 0,5 s en alcanzar la máxima velocidad.

h) En el gráfico $x = f(t)$ se observa que la partícula en $t = 3s$ tiene una posición de $x = 8$ cm

i) En el gráfico $\upsilon = f(t)$ se observa que la partícula en $t = 4s$ tiene una rapidez de -14,51 cm/s

j) En el gráfico $a = f(t)$ se observa que la partícula en $t= 6,5$ s tiene una aceleración de 0 cm/s^2

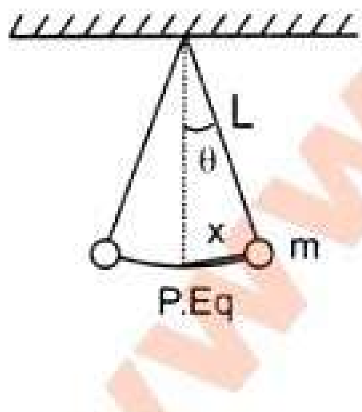
5.5 APLICACIONES DEL MAS

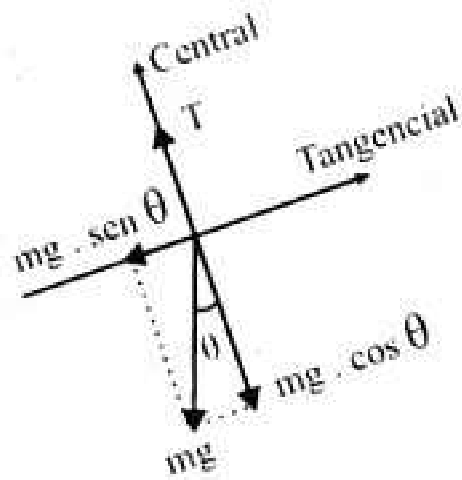
El análisis de los principios del MAS es aplicable en la realidad a todos los sistemas vibrantes de corta amplitud. Estos sistemas no son solamente mecánicos, puesto que la afinidad es muy estrecha para el análisis de ondas de radio, microondas, etc.

El Péndulo Simple: es un sistema mecánico que consta esencialmente de una masa puntual, suspendida de una cuerda de peso despreciable e inextensible.

Cuando el sistema se separa de su posición de equilibrio y se suelta el péndulo oscila en un plano vertical por acción de la gravedad

Consideremos un péndulo de longitud L y una partícula de masa m, oscilando:





En cualquier posición las fuerzas que actúan sobre la partícula son: su peso y la tensión de la cuerda.

La resultante de las fuerzas en dirección central (T-mg.cosθ) proporciona la aceleración centrípeta, que permite a la partícula moverse en el arco de circunferencia. En cambio, la componente del peso en la dirección tangencial, es la fuerza restauradora (Fr) que trata de volver a la partícula a la posición de equilibrio.

Para valores pequeños de θ (hasta 10°), sen θ = θ, en radianes:

$$Fr = -mg.sen\theta \text{ , pero } sen\,\theta = \frac{x}{L}$$

$$Fr = -mg\,\frac{x}{L}\text{, como } Fr = -k.x$$

$$-k.x = -mg\,\frac{x}{L}$$

$$k = \frac{mg}{L}$$, para el péndulo simple. Reemplazando en (5.3.2)

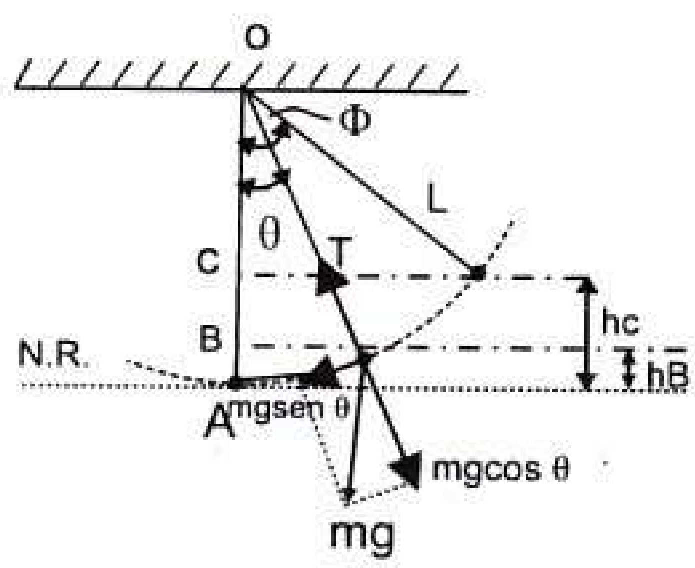
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{mg}{L}}}$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad \textbf{(5.5.1)}$$

Es importante notar que el período de oscilación del péndulo simple es independiente del valor de la masa suspendida.

Ejemplos:

1.- En un péndulo simple, una partícula de masa m esta suspendida de una cuerda de masa despreciable y longitud L. Cuando la partícula se desplaza un ángulo Φ de la vertical es abandonado a si mismo. Hallar:
a)El módulo de la velocidad de la partícula, cuando la cuerda forma un ángulo θ con la vertical
b) El módulo de la velocidad máxima
c) La tensión de la cuerda cuando ésta forma un ángulo θ con la vertical
d) La tensión mínima de la cuerda
e) La tensión máxima de la cuerda.



a) El trabajo de la fuerza de gravedad (mg) es:

$W = mgh_c - mgh_B$

$W = mg(h_c - h_B)$

$W = -mg\,(BC)$

$W = mg\,(OB - OC)$, pero $\cos\theta = \dfrac{OB}{L}$ y $\cos\Phi = \dfrac{OC}{L}$

$W = mg(L.\cos\theta - L.\cos\Phi)$

$W = mgL(\cos\theta - \cos\Phi)$, como $W = \Delta Ec = 1/2\, m\upsilon^2$

$1/2\, m\upsilon^2 = mgL\,(\cos\theta - \cos\Phi)$

$$\upsilon = \sqrt{2gL\,(\cos\theta - \cos\Phi)} \qquad \textbf{(5.5.2)}$$

b)La velocidad es máxima cuando la partícula pasa por la posición de equilibrio ($\theta = 0°$):

$\upsilon = \sqrt{2gL\,(\cos\theta - \cos\Phi)}$

$\upsilon = \sqrt{2gL\,(\cos 0° - \cos\Phi)}$

$$\upsilon = \sqrt{2gL\,(1 - \cos\Phi)} \qquad \textbf{(5.5.3)}$$

c) La fuerza centrípeta que actúa sobre la partícula es:

$Fc = T - mg.\cos\theta$

$m.a_c = T - mg.\cos\theta$

$m\dfrac{\upsilon^2}{L} = T - mg.\cos\theta$

$T = \dfrac{m\upsilon^2}{L} + mg.\cos\theta$, como $\upsilon = \sqrt{2gL\,(\cos\theta - \cos\Phi)}$

Tenemos:

$$T = \frac{m.2gL\,(\cos\theta - \cos\Phi)}{L} + mg.\cos\theta$$

$T = mg(2\cos\theta - 2\cos\Phi + \cos\theta)$

$$T = mg\,(3\cos\theta - 2\cos\Phi) \qquad \textbf{(5.5.4)}$$

Esta ecuación nos permite concluir que la tensión de la cuerda no es constante porque la desviación θ varia.

d) La tensión de la cuerda es mínima, cuando $\theta = \Phi$

$T = mg(3\cos\theta\ -2\cos\ \Phi)$

$T_{min} = mg(3\cos\theta\ -2\cos\ \Phi)$

$T_{mín} =\ mg\cos\ \Phi$ **(5.5.5)**

e) La tensión de la cuerda es máxima cuando $\theta = 0°$

$T = mg(3\cos\theta\ -2\cos\ \Phi)$

$T_{máx} = mg(3\cos 0°\ -2\cos\ \Phi)$

$T_{máx} =\ mg\,(3-2\cos\ \Phi)$ **(5.5.6)**

2.- Una partícula de 0.5kg cuelga de una cuerda de 1m de longitud. Cuando se desplaza 16° de la vertical, es abandonada a si misma. Determinar.

a) El período del movimiento

b) La velocidad de la partícula, cuando la cuerda forma un ángulo de 8° con la vertical, empleando la ecuación (5.5.2) y energía.

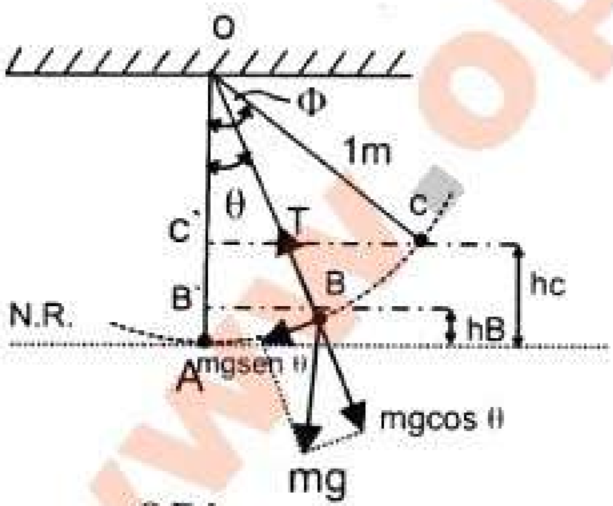
c) La velocidad máxima de la partícula

d) La tensión de la cuerda, cuando ésta forma un ángulo de 8° con la vertical

e) La tensión mínima de la cuerda

f) La tensión máxima de la cuerda

g) La magnitud de la fuerza que tiende a llevarlo a la posición de equilibrio, cuando el péndulo se desvía 8° de la vertical.



$\Phi = 16°$

$\theta = \quad 8°$

$\cos 8° = \dfrac{OB'}{1m}$

$OB' = 1m.\cos 8°$

$OB' = 0{,}99m$

$h_B = 1m - 0{,}99m$

$h_B = 0{,}01m$

$\cos 16° = \dfrac{OC'}{1m}$

$OC' = 1m.\cos 16°$

$OC' = 0{,}961m$

$hc = 1m - 0{,}961m$

$hc = 0{,}039$

a) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L}{g}} = 2\pi\sqrt{\dfrac{1\ m}{9{,}8\ m/s^2}} = 2{,}01\ s$

b) Empleando la ecuación (5.5.2):
$\upsilon = 2gL(\cos\theta - \cos\ \Phi)$
$\upsilon = 2(9{,}8\ m/s2)(1m)(\cos 8^o - \cos 16^o)$
$\upsilon = 0{,}75\ m/s$

Empleando energía
Como el sistema es conservativo, tenemos que:

$Em_B = Em_c$
$Ec_B + Ep_B = Ec_c + Ep_c$
$\frac{1}{2}m\upsilon_B^2 + mg.h_B = mg.h_c$
$\upsilon_B^2 = 2g.\ h_c - 2g.h_B$
$\upsilon_B^2 = 2g(h_c - h_B)$
$\upsilon_B^2 = 2(9{,}8\ m/s^2)(0{,}039m - 0{,}01m)$
$\upsilon_B = 0{,}75\ m/s$

c) $\upsilon_{máx} = \sqrt{2gL(1 - \cos\Phi)}$

$\upsilon_{máx} = \sqrt{2(9{,}8m/s^2)(1 - \cos 16^o)(1m)}$
$\upsilon_{máx} = 0{,}87\ m/s$

d) $T = mg(3\cos\theta - 2\cos\Phi)$
$T = 0{,}5\ kg\ (9{,}8\ m/s^2)(3\cos 8^o - 2\cos 16^o)$
$T = 5{,}14\ [N]$

e) $T_{mín} = mg.\cos\Phi$
$T_{mín} = 0{,}5\ kg\ (9{,}8\ m/s^2)\cos 16^o$
$T_{mín} = 4{,}71\ [N]$

f) $T_{máx} = mg.(3 - 2\cos\Phi)$
$T_{máx} = 0{,}5\ kg\ (9{,}8\ m/s^2)(3 - 2\cos 16^o)$
$T_{máx} = 5{,}28\ [N]$

g) La fuerza que lleva la masa del péndulo a la posición de equilibrio es la componente del peso:
$Fr = mg.sen\theta$
$Fr = 0{,}5\ kg(9{,}8\ m/s2)\ sen\ 8^o$
$Fr = 0{,}68\ [N]$

3.- En el interior de un ascensor se coloca un péndulo simple cuyo período es 3s. Determinar
a) La longitud del péndulo
b) La frecuencia del movimiento cuando el ascensor está en marcha
c) La frecuencia del movimiento cuando el ascensor arranca hacia arriba con un aceleración de $0.6 m/s^2$
d) La frecuencia del movimiento cuando el ascensor arranca hacia abajo con una aceleración de $0.5 m/s^2$.

a) $T = 2\pi \sqrt{\dfrac{L}{g}}$

$$L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{9s^2 . 9.8\ m/s^2}{4\pi^2} = 2.23\ m$$

b) Cuando el ascensor está en marcha normal. la velocidad es constante y el péndulo está solamente bajo la acción de "g"

$$f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{3s} = 0.33\ hz$$

c) Cuando el ascensor arranca hacia arriba. se origina una fuerza de reacción hacia abajo y la aceleración que actúa sobre el péndulo es "$g + 0.6\ m/s^2$".

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g + 0.6\ m/s^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{2.23}{10.4\ m/s^2}} = 2.91\ s$$

$$f_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{2.9s} = 0.34\ hz$$

d) Cuando el ascensor arranca hacia abajo, se origina una fuerza de reacción hacia arriba y la aceleración que actúa sobre el péndulo es "g-0.5 m/s²".

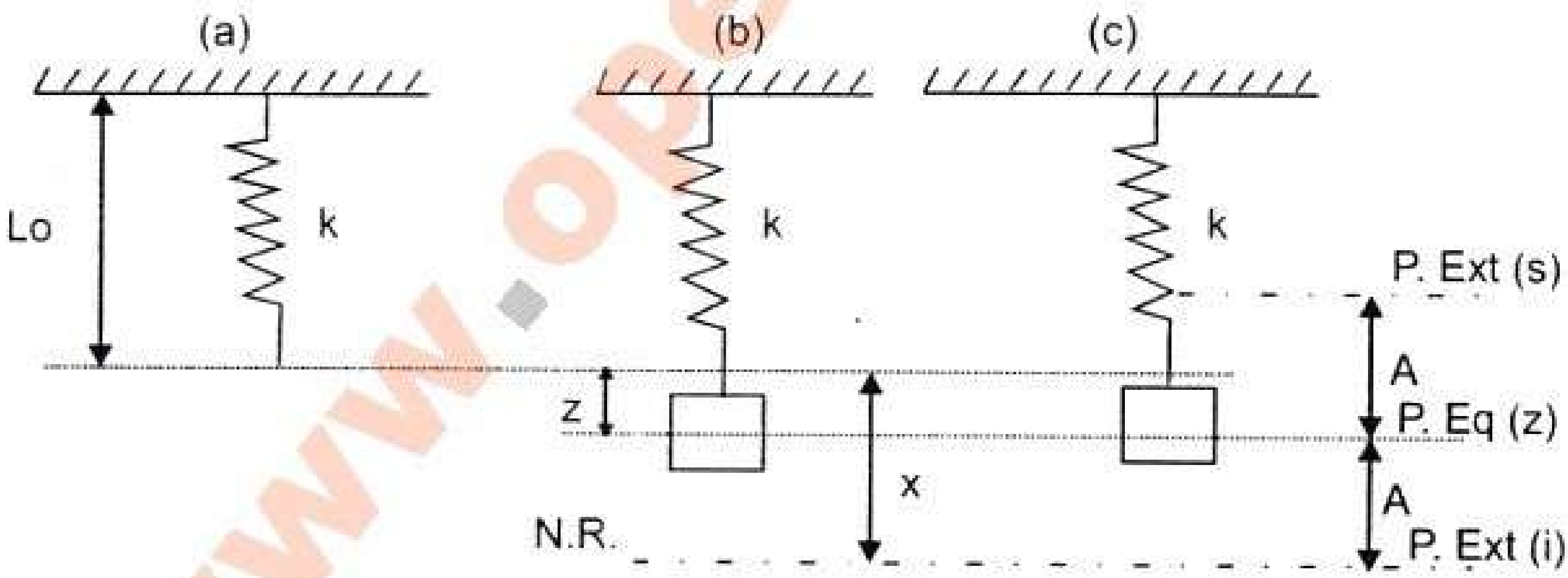
$$T_3 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g - 0.5\ m/s^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{2.23\ m}{9.3\ m/s^2}} = 3.08\ s$$

$$f_3 = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{3.08\ s} = 0.33\ hz$$

Oscilador Vertical: El análisis de la energía en el MAS descrito anteriormente es absolutamente valido para cualquier sistema con tal movimiento, inclusive para el sistema masa-resorte en posición horizontal.

Para un sistema masa-resorte en cualquier posición (inclinada o vertical), el análisis es similar, pero tomando en cuenta la deformación inicial del resorte debida al peso que cuelga.(Epo)

Por ser común e importante, analizaremos la energía mecánica total de un sistema masa-resorte vibrando en posición vertical (oscilador vertical)



a) resorte en posición vertical, con longitud natural Lo y constante elástica k
b) posición de equilibrio (z) del sistema masa-resorte en posición vertical.
c) sistema masa-resorte virando verticalmente. La posición extrema superior puede o no coincidir con el nivel de Lo.

Como el sistema es conservativo, la energia mecánica total es una constante Evaluaremos esta en la posición extrema inferior, que ha sido tomada como nivel de referencia (N.R.):

$Em_{total} = Ep + Ec$

$Em_{total} = ½kx^2$, como $x = z + A$ y $z = mg/k$, tenemos:

$Em_{total} = ½k(z + A)^2$

$Em_{total} = ½k(mg/k + A)^2$ **(5.5.7)**

Ejemplos:

1.- Se coloca un cuerpo de 8kg en el extremo de un resorte de 50cm de longitud y constante elástica k=10 (N/cm). Si a partir de la posición de equilibrio del sistema se estira el resorte 5cm. Calcular:

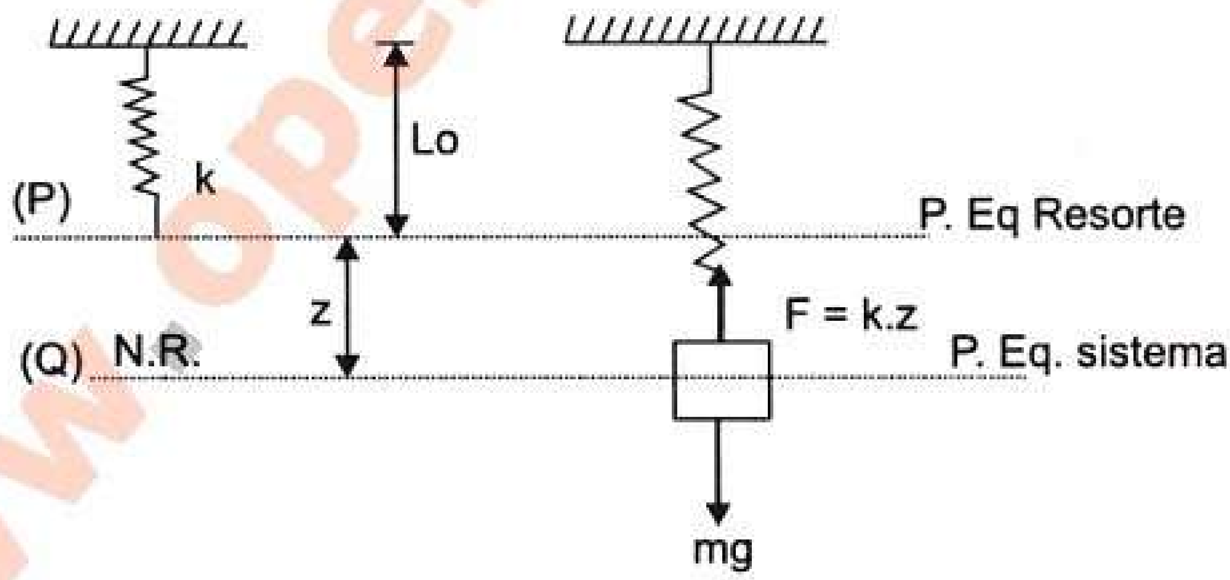
a) El punto de equilibrio del sistema

b) La energía potencial gravitacional, la energía potencial elástica, la energía cinética y la energía mecánica total en un punto situado a 3 cm sobre la posición de equilibrio del sistema.

c) La energía potencial gravitacional, la energía potencial elástica, la energía cinética y la energía mecánica total en un punto situado a 4 cm bajo la posición de equilibrio del sistema

d) La energía mecánica total en el punto de equilibrio del sistema.

a)



$\Sigma Fy = 0$

$F = mg$

$kz = mg$

$$z = \frac{mg}{k} = \frac{8kg.9,8\ m/s^2}{10(N/cm)} = 7,84\ cm = 0,0784\ m$$

El punto de equilibrio del sistema es:

$P.Eq_S = L_o + z = 50\ cm + 7,84\ cm$

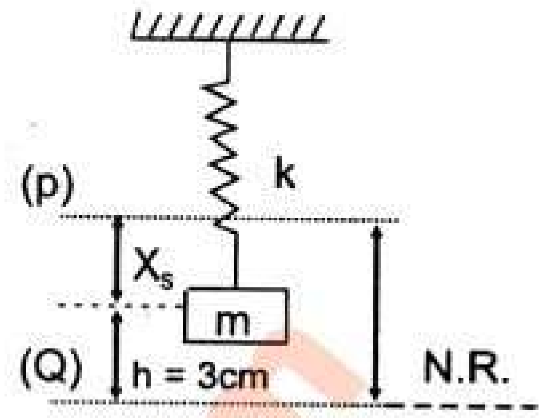
$P.Eq_S = 57,84\ cm$

b) Cuando h=3 cm

$k = 10(N/cm) = 1000\,(N/m)$

$A = 5\,cm = 0{,}05m$

$Xs = z - h = 0{,}0784m - 0{,}03m = 0{,}0484m$



$$\upsilon_s = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = \sqrt{k/m\,(A^2 - h^2)}$$

$$\upsilon_s = \sqrt{\frac{1000(N/m)}{8\,kg}\,[(0{,}05)^2 - (0{,}03)^2]\,m^2} = 0{,}45\,m/s$$

$Ep_{g\,s} = mgh = (8kg)(9{,}8\,m/s^2)(0{,}03m) = 2{,}35\,(J)$

$Ep_{e\,s} = ½k.x^2 = ½(1000N/m)(0{,}0484)^2 = 1{,}17\,(J)$

$Ec_s = ½m\upsilon^2 = ½(8kg)(0{,}45\,m/s)^2 = 0{,}8\,(J)$

$E_{M_S} = Ep_g + Ep_e + Ec$

$E_{M_S} = 2{,}35(J) + 1{,}17(J) + 0{,}8(J)$

$E_{M_S} = 4{,}32\,(J)$

Cuando h = -4 cm

$X_s = z + h = 0{,}0784m + 0{,}04m = 0{,}118m$

$$\upsilon_S = \omega\sqrt{A^2 - x^2} = \sqrt{k/m(A^2 - h^2)}$$

$$\upsilon_S = \sqrt{\frac{1000(N/m)}{8\,kg}\,[(0{,}05)^2 - (0{,}04)^2]\,m^2} = 0{,}34\,m/s$$

$Epg_s = mgh = (8kg)(9{,}8m/s^2)(-0{,}04m) = -3{,}13\,(J)$

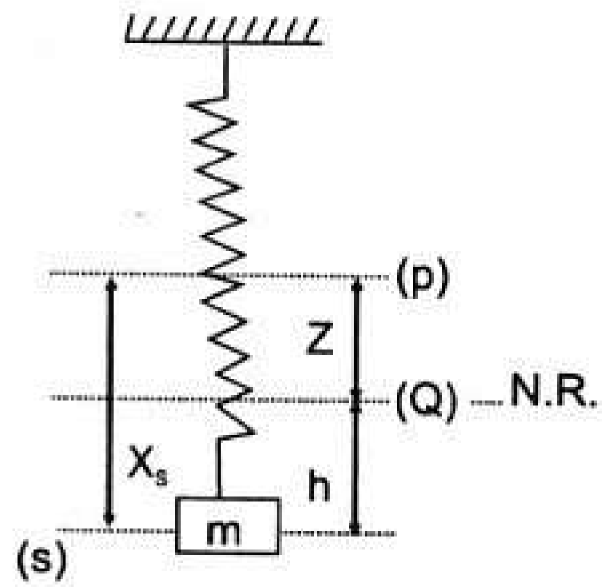
$Epe_s = ½k.x^2 = ½(1000N/m)(0{,}118m)^2 = 7(J)$

$Ec_s = ½m\upsilon^2 = ½(8kg)(0{,}34m/s)^2 = 0{,}45(J)$

$E_{M_S} = Ep_g + Ep_e + Ec$

$E_{M_S} = -3{,}13\,(J) + 7(J) + 0{,}45(J)$

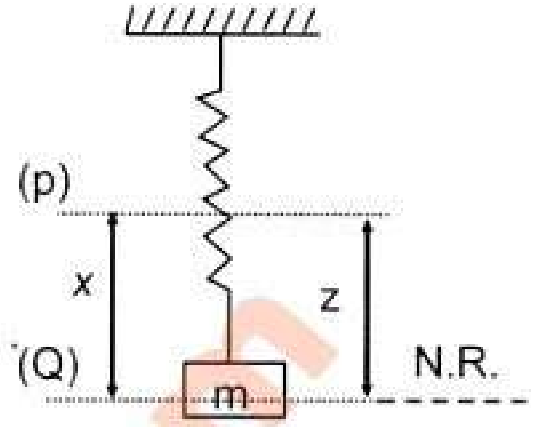
$E_{M_S} = 4{,}32\,(J)$



D) h=0, porque la P. Eqs está en el N.R.
$x = z = 0{,}0784$ m
En la P. Eqs, la velocidad es máxima:

$$\upsilon_{max} = \omega . A = \sqrt{\frac{k}{m}} A = \sqrt{\frac{1000(N/m)}{8kg}} \ .0{,}05m$$

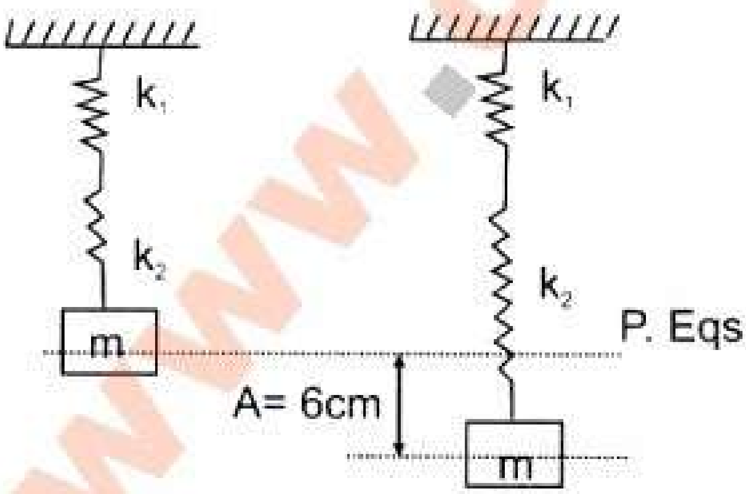
$\upsilon_{max} = 0{,}56$ m/s



$$EM_Q = \overset{0}{\cancel{Epg}} + Epe + Ec$$
$$EM_Q = \tfrac{1}{2}k.x^2 + \tfrac{1}{2}m\upsilon^2$$
$$EM_Q = \tfrac{1}{2}(1000\ N/m)(0{,}0784m)^2 + \tfrac{1}{2}(8kg)(0{,}56\ m/s)^2$$
$$EM_Q = 4{,}32\ (J)$$

2.- Un bloque de 10kg es colocado en el extremo de dos resortes de constantes elásticas K_1=20N/cm y K_2 =3kN/m. si se estira el bloque 6cm por debajo de la posición de equilibrio del sistema y se suelta. Calcular la constante elástica equivalente, el periodo de vibración, la velocidad máxima y la aceleración máxima del bloque cuando los resortes:
a) Están ligados en serie
b) Están ligados en paralelo

a) Cuando están en serie



K_1=20N/cm = 2000 N/m
K_2=3KN/m = 3000 N/m

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{2000\ N/m} + \frac{1}{3000\ N/m}$$

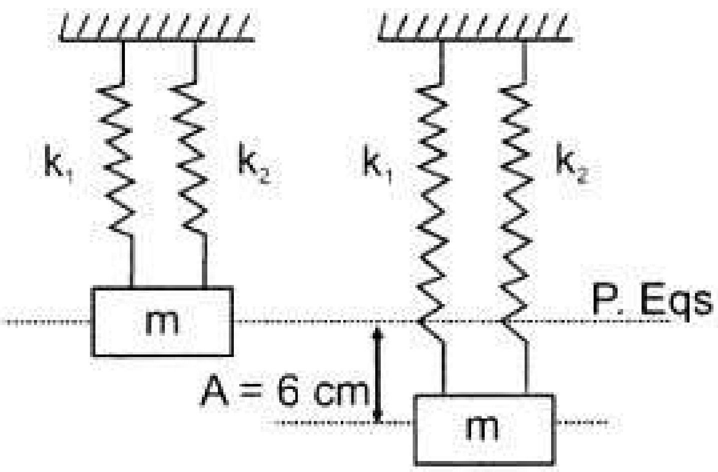
k = 1200N/m

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{10\ kg}{1200\ N/m}} = 0{,}57\ s$$

$$\upsilon_{máx} = \omega.A = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \sqrt{\frac{1200\ (N/m)}{10\ kg}}\ .0{,}06m = 0{,}66\ m/s$$

$$a_{máx} = -\omega^2.A = \frac{k}{m}\ A = \frac{-1200\ (N/m)}{10\ kg}\ \ .0{,}06m = -7{,}2\ m/s^2$$

b) Cuando están en paralelo:



$k = k_1 + k_2$
$k = 2000N/m + 3000\ N/m$
$k = 5000\ N/m$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{10\ kg}{5000\ N/m}} = 0{,}28\ s$$

$$\upsilon_{máx} = \omega.A = \sqrt{\frac{k}{m}}A = \sqrt{\frac{5000\ (N/m)}{10\ kg}}\ \ .0{,}06m = 1{,}34\ m/s$$

$$a_{máx} = -\omega^2.A = -\frac{k}{m}\ .A = \frac{-5000\ (N/m)}{10\ kg}\ \ .0{,}06m = -30\ m/s^2$$

3.- En un oscilador vertical, el cuerpo es de 28kg y la constante elástica del resorte 2800 N/m. Si el cuerpo se separa 0.3m de la posición de equilibrio y se suelta, calcular.

a) La amplitud, frecuencia angular y frecuencia de oscilación
b) El periodo y el ángulo de fase inicial
c) La posición, velocidad y aceleración para cualquier tiempo t
d) La posición, velocidad y aceleración en t=3s
e) La energía mecánica total en t=3s
f) La velocidad y aceleración en términos de la posición
g) La velocidad y aceleración en un punto situado a 5cm sobre la posición de equilibrio del sistema.
h) La energía mecánica total en el punto anterior

i) La velocidad y aceleración en un punto situado a 20cm por debajo de la posición de equilibrio del sistema.

j) La energía mecánica total en el punto anterior.

a) A = 0,3 m

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{2800N/m)}{28kg}} = 10\,\text{rad/s}$$

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{10\ rad/s}{2\pi} = 1{,}59\,\text{Hz}$$

b) $$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1{,}59\ Hz} = 0{,}63\,\text{s}$$

En t = 0 tenemos que $x_0 = A$:

$$\text{sen}\Phi = \frac{x_o}{A} = \frac{A}{A} = 1$$

$$\Phi = 90^\circ = \pi/2$$

c) $x = \pm A.\text{sen}(\omega.t + \Phi)$

$x = \pm 0{,}3\ \text{sen}(10t + \pi/2)\text{m}$

$\upsilon = \pm\omega.A.\cos(\omega.t + \Phi)$

$\upsilon = \pm 3.\cos(10t + \pi/2)\text{m/s}$

$a = \omega^2.A.\cos(\omega.t + \Phi)$

$a = -30.\text{sen}(10t + \pi/2)\text{m/s}^2$

d) $x = 0{,}3.\text{sen}[10(3) + \pi/2]$

$x = h = 0{,}0463\text{m}$

$\upsilon = +3.\cos[10(3) + \pi/2]\text{m/s}$

$\upsilon = 2{,}964\ \text{m/s}$

$a = -30.\text{sen}[10(3) + \pi/2)\text{m/s}^2$

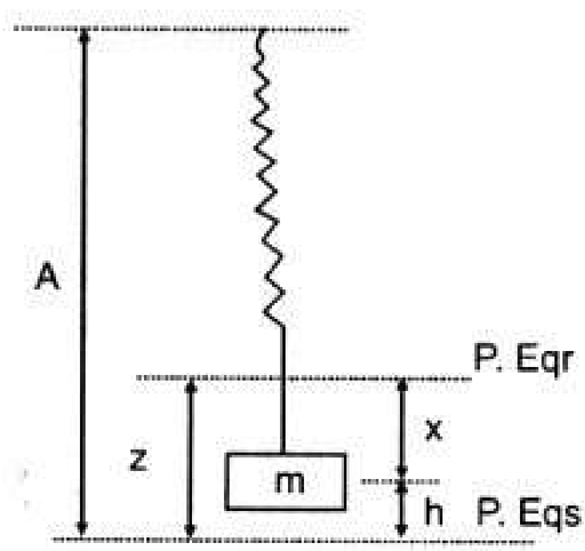
$a = -4{,}628\ \text{m/s}^2$

e) $$z = \frac{mg}{k} = \frac{28\ kg\ .\ 9{,}8\ m/s^2}{2800\ N/m} = 0{,}098\text{m}$$

$x = z - h$

$x = 0{,}098\ \text{m} - 0{,}046\text{m}$

$x = 0{,}052$

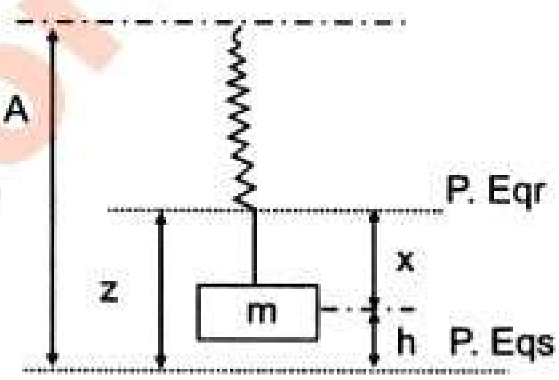


$E_M = Epg + Epe + Ec$
$E_M = mgh + 1/2\,k.x^2 + 1/2\,m\upsilon^2$
$E_M = 28\,kg\,(9{,}8m/s^2)(0{,}0463m) + 1/2\,(2800\,N/m)(0{,}052m)^2 + 1/2\,(28\,kg)(2{,}964\,m/s)^2$
$E_M = 12{,}67\,(J) + 3{,}78\,(J) + 122{,}99\,(J)$
$E_M = 139{,}44\,(J)$

f) $\upsilon = \omega\sqrt{A^2 - x^2}$ $a = -\omega^2 x$

$\upsilon = 10\sqrt{0{,}09 - x^2}$ $a = -100\,x$

g) $\upsilon = 10\sqrt{0{,}09 - 0{,}0025}$ $a = -100(0{,}05)$
$\upsilon = 2{,}958\,m/s$ $a = -5\,m/s^2$



h) $x = z - h$
$x = 0{,}098\,m - 0{,}05\,m$
$x = 0{,}048\,m$

$E_M = Ep_g + Ep_e + Ec$
$E_M = mgh + 1/2\,k.x^2 + 1/2\,m\upsilon^2$
$E_M = 28\,kg\,(9{,}8m/s^2)(0{,}05m) + 1/2\,(2800\,N/m)(0{,}048m)^2 + 1/2\,(28\,kg)(2{,}958\,m/s)^2$

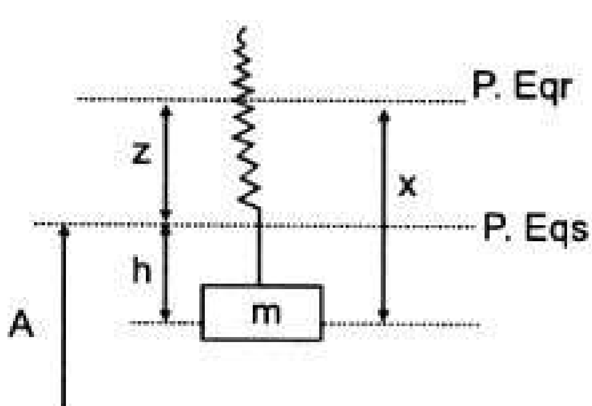
$E_M = 13{,}72\,(J) + 3{,}226(J) + 12{,}55(J)$
$E_M = 139{,}4\,(J)$

i) Cuando $h = -0{,}2\,m$

$\upsilon = 10\sqrt{0{,}09 - 0{,}04}$ $a = -100(0{,}2m)$

$\upsilon = 2{,}236\,m/s$ $a = -20\,m/s^2$

j) $x = z + h$
$x = 0{,}098m + 0{,}2m$
$x = 0{,}298\,m$



$E_M = Ep_g + Ep_e + Ec$
$E_M = mgh + 1/2\,k.x^2 + 1/2\,m\upsilon^2$

$E_M = 28kg(9,8m/s^2)(-0,2m) + 1/2(2800N/m)(0,298m)^2 + 1/2$
$(28kg)(2,236m/s^2)$

$E_M = -54,88\,(J) + 124,32(J) + 70(J)$
$E_M = 139,44(J)$

5.6 EJERCICIO No.8

1.- Un cuerpo de 150g posee MAS a lo largo de la recta AB de 10cm longitud, con un periodo de 4 s. Si en t = 0 la partícula parte de la posición de equilibrio hacia el punto B, calcular:
a) Las ecuaciones del movimiento.
b) La constante de recuperación del movimiento.
c) La velocidad en el punto x= -2,5cm.
d) La aceleración de la partícula en t=3 s.
e) La energía cinética en t=5 s.

2.- Un péndulo esta formado por una partícula de 0.2kg y una cuerda de masa despreciable de 1m de longitud. Determinar:
a) El período del péndulo en un lugar donde $g=9,8lm/s^2$
b) El valor de "g" para que el período de este péndulo sea 0.4 s mayor que el anterior.
c) Que longitud debe tener la cuerda, para que el período de la pregunta a) se duplique.
d) La intensidad de la fuerza que tiende a llevarlo a la posición de equilibrio cuando la cuerda se desvía 5º de la vertical.
e) La velocidad de la partícula cuando pasa por la posición de equilibrio.

3.- Dada la ecuación x = 4 sen (2t) cm, correspondiente al movimiento armónico de una partícula de 80g, calcular:
a) La amplitud, frecuencia angular y ángulo de fase inicial del movimiento.
b) La constante de oscilación de la partícula.
c) La posición de la partícula en t = 4 s.
d) La energía potencial en t = 4 s.
e) La aceleración de la partícula en t = 4 s.

4.- Un cuerpo de 8kg se suspende de un resorte de constante elástica 15 N/cm. Si se separa el cuerpo 7cm de la posición de equilibrio del sistema y se suelta, calcular

a) La frecuencia angular, el período y el ángulo de fase inicial.
b) La posición, velocidad y aceleración para cualquier tiempo t.
c) La posición, velocidad y aceleración para $t = 4s$
d) La energía mecánica total en $t = 4s$.
e) La energía mecánica total en la posición de equilibrio del sistema.

5.- Una partícula de 75g esta animada de MAS con una frecuencia de 60Hz y una amplitud de 8 cm. Si en $t = 0$ la partícula pasa por su posición de equilibrio en el sentido positivo de la posición, determinar:

a) Las ecuaciones del movimiento.
b) El tiempo mínimo para alcanzar la aceleración máxima
c) La fuerza recuperadora en $t=2s$
d) La energía potencial en $t=2s$
e) La energía cinética en $t=2s$

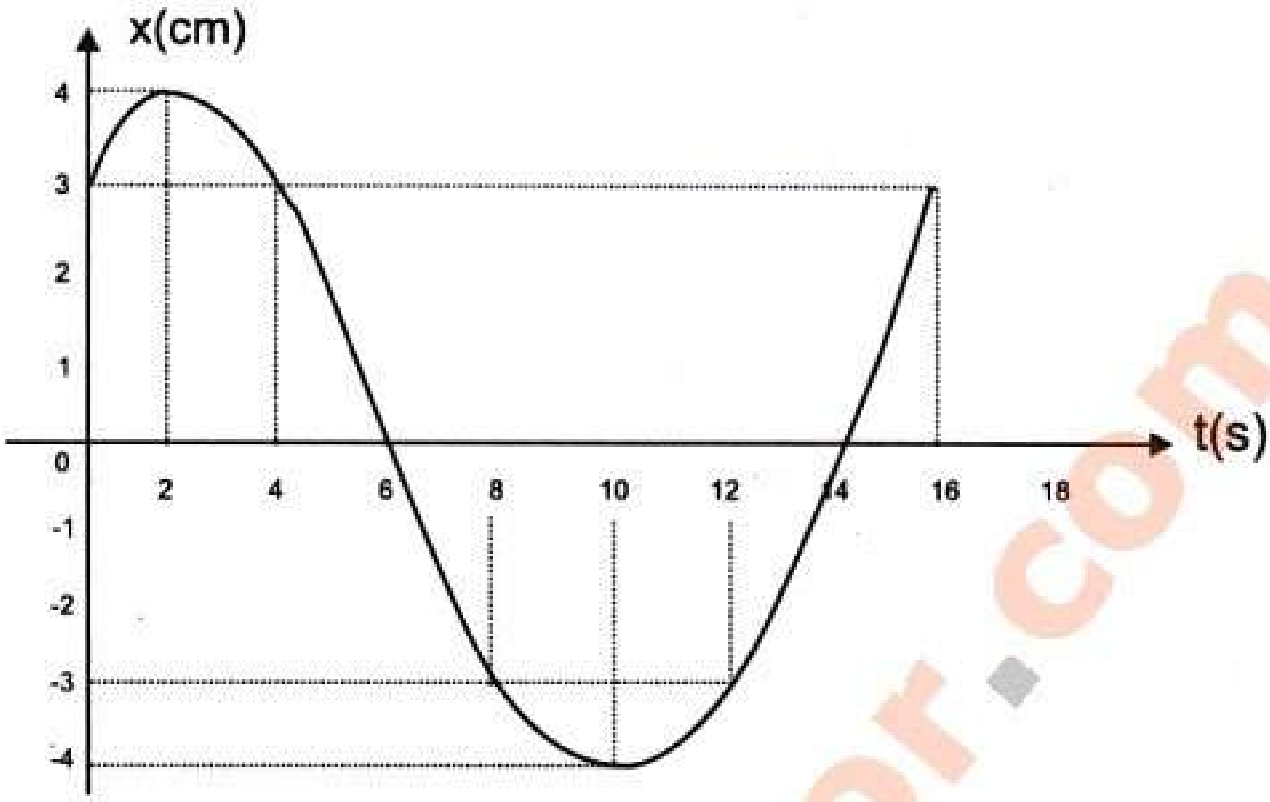
6.- En un péndulo simple, si la longitud de la cuerda es 110 cm y la masa de la partícula suspendida en 0.3kg, hallar:

a) El período de oscilación
b) Qué longitud debe tener la cuerda, para que la frecuencia se reduzca a la tercera parte.
c) Qué longitud debe tener la cuerda, para que el péndulo de 4 veces más oscilaciones que las que da actualmente.
d) La amplitud del movimiento, si la velocidad máxima de la partícula es 20cm/s
e) La magnitud de la fuerza que tiende a llevarlo a la posición de equilibrio, cuando la cuerda se desvía 4° de la vertical.

7.- Dada la ecuación $x = 10 \text{ sen } (45° \, t)$ m, correspondiente al MAS de una partícula de 140g, calcular:

a) La constante de oscilación de la partícula
b) La posición de la partícula en $t = 1$ s
c) La fuerza recuperadora en $t = 1$ s
d) La energía cinética en $t = 3$ s
e) El tiempo mínimo para conseguir la aceleración máxima.

8.- La gráfica x= f(t) de una partícula que oscila con MAS es:



Determinar:

a) La amplitud y período del movimiento
b) La frecuenta angular de la oscilación
c) El ángulo de fase inicial
d) Las ecuaciones del movimiento en función del tiempo
e) Las gráficas v=f(t) y a= f(t)

9.- A un resorte de 50 cm de longitud y constante elástica 1.3 kN/m se le suspende un cuerpo de 12kg. Si el cuerpo se separa 0.15m de la posición de equilibrio del sistema y se suelta, determinar:

a) La amplitud, frecuencia angular y período
b) La fuerza recuperadora en h= 10cm
c) La velocidad y aceleración en términos de la posición
d)La velocidad y aceleración en un punto situado a 6cm por debajo de la posición de equilibrio del sistema.
e)La energía mecánica total en el punto anterior.

10.- Una partícula de 10g se mueve con MAS de frecuencia 5Hz y amplitud 2cm. En t=0 pasa por la posición de equilibrio en el sentido positivo. Determinar en t=1.71s:

a) La posición de la partícula
b) La velocidad de la partícula
c) La aceleración de la partícula
d) La fuerza recuperadora
e) La energía mecánica total

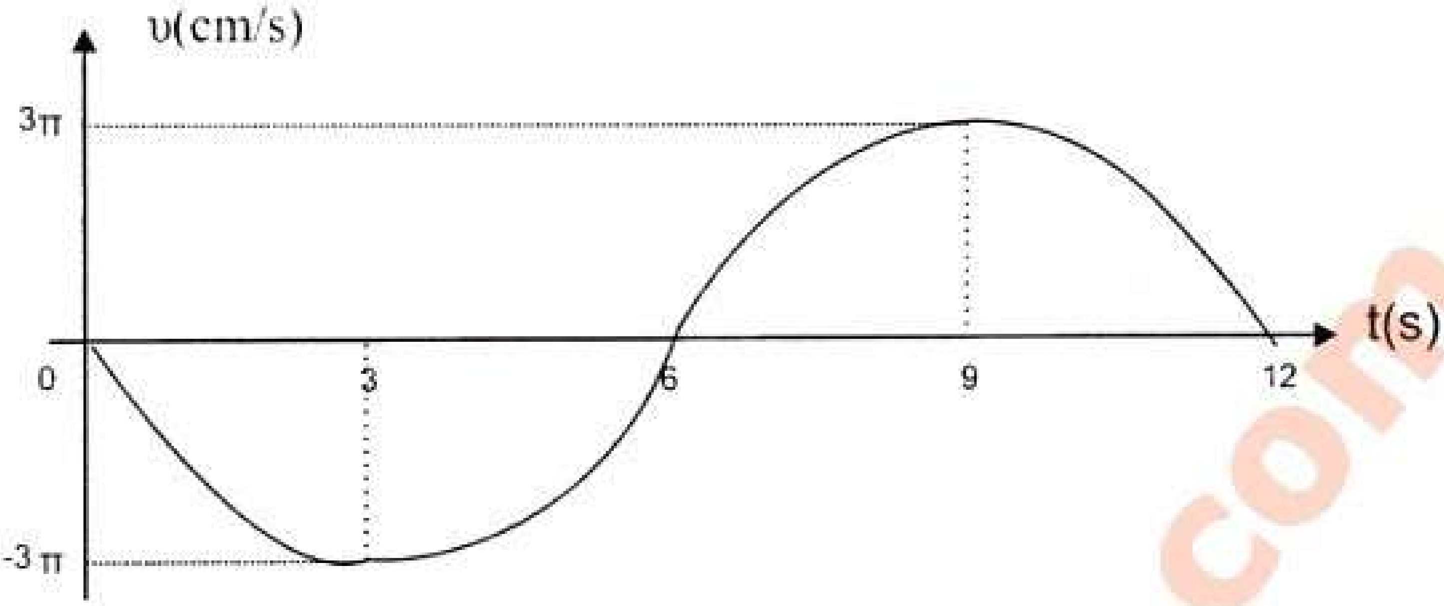
11.- Un péndulo simple consta de una partícula de 200g, atada a una cuerda de masa despreciable de 1.3m de longitud. Cuando se separa el péndulo de su posición de equilibrio un ángulo de 8° y se abandona a si mismo.
Determinar:
a) El periodo de oscilación
b) Cuál es la velocidad máxima del movimiento
c) La tensión de la cuerda en la posición de equilibrio
d) La magnitud de la fuerza que tiende a llevarlo a la posición de equilibrio, cuando la cuerda se desvía 3 de la vertical.
e) La energía cinética en la posición de equilibrio.

12.- La ecuación del MAS de una partícula de 50g es $x=5sen(4t+3)$ cm, hallar:
a) La amplitud, frecuencia angular y ángulo de fase inicial del movimiento
b) La constante de oscilación de la partícula
c) La posición de la partícula en t=2s
d) La velocidad de la partícula en t=2s
e) La energía mecánica total en t=2s

13.- A un resorte de 30cm de longitud se le suspende un cuerpo de 100g. Cuando el sistema alcanza la posición de equilibrio, la longitud del resorte es 34cm. Si se estira el cuerpo 3cm hacia abajo y se suelta, calcular:
a) La constante de recuperación del resorte
b) La amplitud, frecuencia angular, frecuencia de oscilación y periodo.
c) La fuerza recuperadora cuando h= -2cm
d) La velocidad y aceleración en un punto situado a 1cm por encima de la posición de equilibrio de sistema.
e) la energía mecánica total en el punto anterior

14.- Una masa de 20g se mueve con MAS de amplitud 24cm y período 2 s.
En t= 0 la posición es 14 cm. Determinar:
a) La frecuencia angular de oscilación y el ángulo de fase inicial
b) Las ecuaciones del movimiento
c) El tiempo mínimo para alcanzar la fuerza máxima
d) La velocidad de la partícula en t= 1,5 s
e) La energía cinética en t= 1,5 s.

15.- La gráfica v = f(t) de una partícula que oscila con MAS es:



Determinar:
a) La frecuencia angular de oscilación
b) La amplitud de movimiento
c) El ángulo de fase inicial
d) Las ecuaciones del movimiento en función del tiempo
e) Las gráficas x= f(t) y a = f(t)

16.- Un péndulo esta formado por una partícula de 100g suspendida del extremo de una cuerda de 1.5m de longitud. En la posición máxima la partícula se halla a 5cm sobre el plano horizontal que pasa por la posición de equilibrio. Determinar.
a) El periodo de oscilación
b) La velocidad de la partícula cuando pasa por la posición de equilibrio
c) La energia cinética en la posición de equilibrio
d) La tensión mínima de la cuerda
e) La magnitud de la fuerza que tiende a llevarlo a la posición de equilibrio cuando la cuerda se desvia 6° de la vertical.

17.- La ecuación de la posición de una partícula de 30g animada de un MAS es $x = 2\,\text{sen}\,(1/4t + \pi/6)$ cm, calcular:
a) La amplitud, frecuencia angular y ángulo de fase inicial del movimiento
b) La constante de oscilación de la partícula.
c) La fuerza recuperadora en t=5s
d) La velocidad de la partícula en t=5 s
e) La energía mecánica total en t=5 s

18.- Una partícula de 40g que vibra con MAS, tiene una amplitud de 6cm, un periodo de 3 s y un ángulo de fase inicial de 40°. Calcular:
a) Las ecuaciones del movimiento
b) La constante de recuperación del movimiento
c) La posición de la partícula en t=4s
d) La velocidad de la partícula en t=4s
e) La energía mecánica total en t=4s

19.- La ecuación de la posición de una partícula de 55g animada de un MAS es $x=6\ \text{sen}(0.75t - \pi/3)$ m . Hallar:
a) La constante de oscilación de la partícula
b) La posición de la partícula en t= 2s
c) La energía potencial en t=2s
d) La aceleración de la partícula en t=2 s
e) El tiempo mínimo para conseguir la fuerza máxima

20.- Cuando un cuerpo de 1kg es colocado en el extremo de un resorte, este se estira 5cm. Si fijamos otro cuerpo de 2.5kg y estiramos el resorte 8cm a partir de la posición de equilibrio del sistema, al soltarlo comienza a oscilar. Calcular.
a) La constante de recuperación del resorte
b) La velocidad máxima
c) La aceleración máxima
d) La posición, velocidad y aceleración en t=2s
e) La energía mecánica total en t=2s

5.7 EVALUACIÓN OBJETIVA

Completar:

1.- En un sistema masa- resorte, cuando la masa está en su punto mas bajo o mas alto, la magnitud de la aceleración es...

2.- El periodo de un sistema con MAS es..................................de la amplitud del sistema.

3.- Un oscilador vertical tiene por velocidad máxima 6m/s y por aceleración máxima 60m/s. La ecuación del movimiento es...

4.- La rapidez en un MAS es...cuando la partícula pasa por la posición de equilibrio.

5.- Un reloj de péndulo regulado a 45º de latitud, en el Ecuador se.............. .... por ser.........................la gravedad.

6.- En el MAS la aceleración es...........................en magnitud y dirección

7.- En la posición de equilibrio de un sistema masa-resorte, la fuerza neta aplicada al sistema es...

8.- La rapidez de una partícula que tiene MAS es... ....en el extremo de la trayectoria.

9.- Un péndulo de varilla metálica da mas oscilaciones en verano, porque la varilla .... y el período del péndulo...................................

10.- En un MAS la aceleración es.....................................cuando la partícula está en la posición de equilibrio.

11.- En el movimiento de un péndulo intervienen dos fuerzas ....de la cuerda y.............................del cuerpo.

12.- En el movimiento x= 5 sen 4t, la ecuación de la velocidad es ....y la ecuación de la aceleración es ....

13.- Un reloj de péndulo regulado a 45° de latitud, en los polos se.......................... ....por ser...................................la gravedad .

14.- La aceleración de una partícula que ejecuta MAS es máxima, cuando su rapidez es ....

15.- En un sistema masa-resorte, al alejarse la masa de la posición de equilibrio, las magnitudes de la fuerza recuperadora y posición ....

16.- En el MAS de una partícula................actúan fuerzas no conservativas porque...

17.- Dos péndulos simples de la misma longitud y de distinta masa, tienen ....período de oscilación.

18.- Cuando se deforma un resorte, la fuerza recuperadora tiende a llevarlo a ....

19.- En el MAS, la magnitud de la aceleración es máxima, cuando la magnitud de la posición es ....

20.- En un sistema masa-resorte, cuando la masa se esta moviendo hacia arriba de su posición de equilibrio, la aceleración esta dirigida hacia ....

Escribir (V) verdadero o (F) falso

1.- En un MAS, cuando la velocidad aumenta en valor absoluto, la aceleración también aumenta en valor absoluto .... ( )

2.- El período de un péndulo simple es independiente de la masa oscilante ....( )

3.- Una partícula que ejecuta MAS tiene un movimiento periódico ....( )

4.- Cuando un reloj de péndulo se adelanta, se puede regular alargando la longitud del péndulo...( )

5.- En el MAS la fuerza recuperadora es siempre contraria a la velocidad.....( )

6.- La velocidad de oscilación de un péndulo simple, es independiente de la masa oscilante ....( )

7.- En el MAS el movimiento pasa de retardado a acelerado, cada vez que la partícula pasa por la posición de equilibrio ....( )

8.- La fuerza recuperadora y la posición de un resorte tienen la misma dirección y sentido...( )

9.- La energía cinética de una partícula que ejecuta un MAS es constante ....( )

10.- Un reloj de péndulo regulado a 45° en tierra, en un avión en vuelo se atrasa, por ser menor la gravedad...( )

11.- En el MAS la aceleración es constante .... ( )

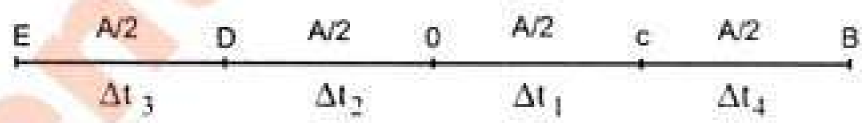
12.- Un péndulo de varilla metálica aumenta su período en invierno................( )

13.- En el MAS la energía potencial es máxima, cuando la partícula pasa por la posición de equilibrio...( )

14.- En un sistema masa-resorte, la aceleración y la fuerza recuperadora tienen la misma dirección...( )

15.- Un reloj de péndulo en el centro de la tierra, se para por ser nula la gravedad...( )

16.- La figura representa la trayectoria de una partícula con MAS, donde:



Δt_1 es el tiempo en recorrer OC
Δt_2 es el tiempo en recorrer OD
Δt_3 es el tiempo en recorrer DE
Δt_4 es el tiempo en recorrer CB

$\Delta t_1 = \Delta t_2$ ....( )
$\Delta t_3 = \Delta t_2$ ....( )
$\Delta t_4 = \Delta t_2$ ....( )
$\Delta t_4 = \Delta t_3$ ....( )
$\Delta t_4 = 2\Delta t_1$ ....( )
$\Delta t_3 = 2\Delta t_2$ ....( )

17.- Un péndulo oscilando en el aire bajo la acción de la gravedad realiza oscilaciones amortiguadas...( )

18.- En el MAS la Em del sistema es constante...( )

19.- Un reloj de péndulo regulado a 45° de longitud situado en el fondo de una mina se atrasa por ser menor la gravedad...( )

20.- El MAS es un ejemplo del movimiento uniformemente acelerado..........( )

Subrayar la respuesta correcta:

1.- En una partícula que ejecuta MAS, la energía cinética es máxima:
a) En los puntos de posición máxima
b) En los puntos de aceleración máxima
c) En los puntos de aceleración nula
d) N.R.A.

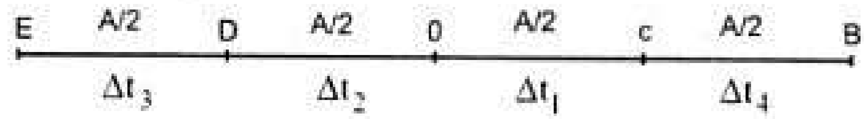
2.- Para que un péndulo cuadruplique su frecuencia actual, su nueva longitud deberá ser:
a) 16 veces más grande
b) 16 veces más pequeña
c) 2 veces más grande
d) 2 veces mas pequeña

3.- En un MAS la energía potencial es proporcional a:
a) La posición
b) El cuadrado de la posición
c) El inverso de la velocidad
d) El inverso de la velocidad al cuadrado

4. El período de un péndulo simple no depende de:
a) La aceleración de la gravedad del lugar
b) La longitud de la cuerda
c) Las oscilaciones que se produzcan
d) La masa de la partícula

5.- En una partícula que ejecuta MAS:
a) La velocidad es nula cuando la posición es nula
b) La velocidad es nula cuando la aceleración es máxima
c) La velocidad es nula cuando la aceleración es nula
d) N.R.A.

6.- La figura representa la trayectoria de una partícula con MAS, donde
Δt_1 es el tiempo en recorrer OC



Δt_2 es el tiempo en recorrer OD
Δt_3 es el tiempo en recorrer DE
Δt_4 es el tiempo en recorrer CB

6.1 El período de oscilación en función de Δt_1 es:
a) 3 Δt_1
b) 6 Δt_1
c) 12 Δt_1
d) 24 Δt_1

6.2 El período de oscilación en función de Δt_3 es:
a) 3 Δt_3
b) 6 Δt_3
c) 12 Δt_3
d) 24 Δt_3

7.- Cuando la longitud de un péndulo cuadruplica, el período:
a) sigue igual
b) se reduce a la cuarta parte
c) se reduce a la mitad
d) se hace el doble

8.- En el MAS:
a) La aceleración es constante
b) La velocidad es proporcional al tiempo
c) La aceleración es proporcional a la posición
d) La aceleración es proporcional al tiempo

9.- Si la longitud de un péndulo disminuye a la mitad su frecuencia de oscilación se multiplica por un factor de:
a) 2
b) $\sqrt{2}$
c) $1/\sqrt{2}$
d) 1/4

10.- La energía mecánica de una partícula que ejecuta MAS es:
a) Inversamente proporcional al cuadrado del período.
b) Directamente proporcional al cuadrado del período.
c) Inversamente proporcional al período.
d) Directamente proporcional a la amplitud.

11.- Dos sistemas masa-resorte A y B oscilan con frecuencias f_A y f_B. Si $f_B=2f_A$ y $k_A=k_B$. Las masas m_A y m_B están relacionadas mediante:
a) $m_A = m_B/4$
b) $m_A = m_B/2$
c) $m_A = 2m_B$
d) $m_A = m_B$

12.- En el MAS la aceleración es variable:
a) únicamente en magnitud
b) únicamente en dirección
c) en magnitud y sentido
d) N.R.A.

13.- Para que el período de un péndulo se duplique, la longitud de la cuerda debe ser:
a) La cuarta parte
b) El cuádruple
c) La mitad
d) El doble

14.- Si la magnitud de la aceleración de la gravedad se cuadruplica, el período de un péndulo será:
a) La cuarta parte
b) El cuádruple
c) La mitad
d) El doble

15.- Para una partícula que ejecuta MAS, si el período es 0,5 s y la amplitud 10 m. La ecuación del movimiento para t es:
A) $x= 20.\ \text{sen}\ 4t$
b) $x= 10.\ \text{sen}\ \pi t$
c) $x=10.\ \cos 0{,}5t$
d) $x= 10.\ \cos 4\pi t$

16.- La energía de un péndulo simple de longitud L y masa m que oscila con una amplitud A es:
a) independiente de m
b) independiente de L
c) independiente de A
d) dependiente de A, L y m

17.- Un sistema masa-resorte de 4kg vibra con una energía de 10 J cuando la amplitud de la vibración es 10 cm. Si se sustituye la masa por otra de 2kg y el sistema se pone a vibrar con la misma amplitud, la energía es:
a) 10J
b) 5 J
c) 20 J
d) 2.5 J

18.- A un cuerpo de 3kg se le aplica una fuerza F= -27x. Si x mide en metros y F en newtons, la frecuencia angular del movimiento es:
a) 3 rad/s
b) 27 rad/s
c) 51 rad/s
d) 9 rad/s

19.- En una partícula que ejecuta MAS, en los puntos donde la velocidad es nula, la aceleración es:
a) Nula
b) Máxima en valor absoluto
c) Mínima en valor absoluto
d) Indefinida

20.- El período de un péndulo simple aumenta si:
a) Oscila en un arco menor
b) Se le lleva al Polo Norte
c) Se le lleva a la cima de una montaña muy alta
d) Se disminuye su longitud

6. HIDROSTATICA

6.1 ESTRUCTURA DE LA MATERIA

La materia de forma general se presenta en los siguientes estados: sólido, líquido o gaseoso.

En el estado sólido las moléculas se encuentran muy cerca unas de otras y por lo tanto las fuerzas de cohesión entre ellas son sumamente intensas. Esto determina que los sólidos posean una forma definida y ocupen un volumen propio.

En el estado líquido las moléculas se encuentran dispuestas a mayor distancia que en los sólidos, por lo que las fuerzas de cohesión entre ellas son pequeñas.
Esto determina que ocupen un volumen propio, pero que no tengan una forma definida, sino que adopten la del recipiente que los contiene.

En el estado gaseoso las distancias entre las moléculas son muy grandes, por lo que las fuerzas de cohesión entre ellas son prácticamente nulas. Esto determina que presenten una tendencia a ocupar el mayor volumen posible al poder expandirse con facilidad.

En los líquidos y gases, las fuerzas de cohesión entre las moléculas son muy débiles, por lo que éstas pueden "resbalar" unas sobre otras fácilmente y se dice comúnmente que fluyen. El nombre fluido se aplica entonces tanto a los líquidos como a los gases.

Tanto sólidos como líquidos son poco compresibles, en cambio los gases al estar dispuestos por moléculas muy separadamente, son fácilmente compresibles. Al reducir las distancias intermoleculares disminuirá el volumen del gas.

6.2 DENSIDAD

Se define a la densidad (ρ) de una sustancia como la relación entre la masa de ésta y su volumen:

$\rho = \frac{m}{V}$, donde m = masa y V = volumen **(6.2.1)**

La densidad de una sustancia es una propiedad característica de ésta que le permite diferenciarse de otras.

Unidades. La densidad es una magnitud escalar, cuyas unidades son las de una masa divididas por las de un volumen.

En el SI: $\rho = \frac{m}{V}$

$$\rho = \left[\frac{kg}{m^3}\right]$$

En el CGS: $\rho = \frac{m}{V}$

$$\rho = \left[\frac{g}{cm^3}\right]$$

Dimensiones:

$$\rho = \frac{m}{V}$$

$$[\rho] = [M/L^3]$$

$$[\rho] = [ML^{-3}]$$

Densidad Relativa: es la relación entre la densidad de una subsistencia cualesquiera y la de otra que establece como patrón o referencia. De manera general la densidad de la sustancia referencial es la del agua, cuyo valor es de:

$$\rho_{H2O} = 1\ g/cm^3 = 1000\ kg/m^3$$

La densidad relativa de una substancia es una magnitud adimensional y su valor es el mismo de la densidad.

En la tabla siguiente se muestra los valores de la densidad de algunos materiales en g/cm^3.

SOLIDOS		LIQUIDOS		GASES	
Oro	19,30	Mercurio	13,60	Cloro	$3{,}22 \times 10^{-3}$
Plomo	11,34	Yodo	4,95	Ozono	$2{,}14 \times 10^{-3}$
Plata	10,50	Cloroformo	1,53	Dióxido de Carbono	$2{,}00 \times 10^{-3}$
Cobre	8,80	Glicerina	1,26	Oxígeno	$1{,}43 \times 10^{-3}$
Acero	7,80	Sangre	1,05	Aire	$1{,}29 \times 10^{-3}$
Hierro Fundido	7,10	Agua de mar	1,03	Monóxido de Carbono	$1{,}25 \times 10^{-3}$
Diamante	3,50	Leche	1,02	Nitrógeno	$1{,}25 \times 10^{-3}$
Aluminio	2,60	Agua a 4º C	1,00	Neón	$0{,}90 \times 10^{-3}$
Vidrio común	2,50	Aceite vegetal	0,92	Vapor de agua (100º)	$0{,}81 \times 10^{-3}$
Hormigón, piedra	2,30	Aceite lubricte	0,90	Metano	$0{,}72 \times 10^{-3}$
Hielo	0,90	Alcohol	0,80	Amoníaco	$0{,}70 \times 10^{-3}$
Madera	0,60	Petróleo	0,80	Helio	$0{,}18 \times 10^{-3}$
Corcho	0,25	Gasolina	0,70	Hidrógeno	$0{,}09 \times 10^{-3}$

6.3 PESO ESPECÍFICO

Se define al peso específico (γ) de una substancia, como la relación entre el peso de ésta y su volumen:

$$\gamma = \frac{mg}{V} \tag{6.3.1}$$

$$\gamma = (m/V)g = \rho . g \tag{6.3.2}$$

De la ecuación (6.3.2) se concluye que el peso específico de una substancia es igual al producto de su densidad por la gravedad.

Unidades: El peso específico es una magnitud escalar, cuyas unidades son las de un peso dividido por las de un volumen.

$$\gamma = \frac{mg}{V}$$

En el SI: $\gamma = \left[\frac{N}{m^3}\right]$

En el CGS: $\gamma = \left[\frac{dina}{cm^3}\right]$

Dimensiones:

$\gamma = \dfrac{mg}{V}$

$[\gamma] = [MLT^{-2}/L^3]$
$[\gamma] = [ML^{-2}T^{-2}]$

Ejemplos:

1.- En una esfera de 10cm de radio y 5kg de masa, calcular:
a) El volumen d la esfera
b) La densidad de la esfera

a) $V = \dfrac{4}{3}\ \pi R^3$

$V = \dfrac{4}{3}\ \pi(10\ cm)^3$

$V = 4188{,}79\ cm^3$

b) $\rho = \dfrac{m}{V}$

$\rho = \dfrac{5\ kg}{4188{,}89\ cm^3} = \dfrac{5000g}{4188{,}89\ cm^3}$

$\rho = 1{,}19\ g/cm^3$

2.- Un alambre de cobre de sección igual a $2mm^2$ y densidad $8.8g/cm^3$ tiene una masa de 12kg. Hallar:
a) El volumen del alambre
b) La longitud del alambre

a) $\rho_C = \dfrac{m_C}{V_C}$

$V_C = \dfrac{m_C}{\rho_C} = \dfrac{12\ kg}{8{,}8\ g/\ cm^3} = \dfrac{1200\ g}{8{,}8\ g/\ cm^3}$

$V_C = 1363{,}64\ cm^3$

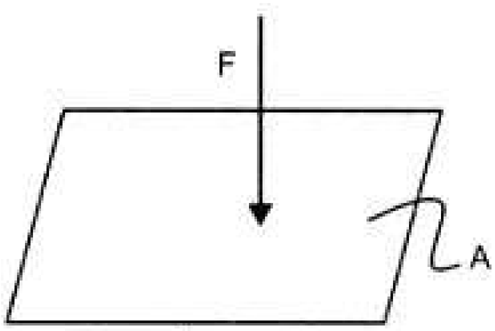
b) $V_C = A \cdot x$, donde A = área y x = longitud

$$x = \frac{Vc}{A} = \frac{1363{,}64\ cm^3}{2mm^2} = \frac{1363{,}64\ cm^3}{0{,}02cm^2}$$

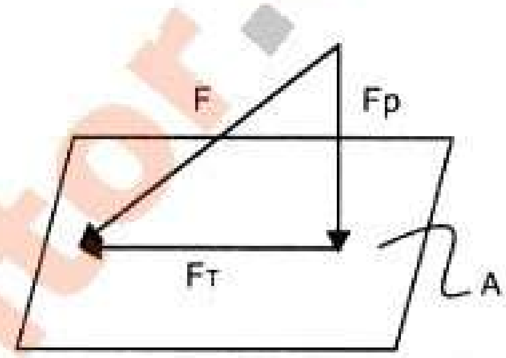
$x = 68181{,}82$ cm
$x = 681{,}81$ m

6.4 PRESION

Presión (P) es la relación entre la fuerza perpendicular (normal) que actúa sobre una superficie y el valor del área de esa superficie.



$$P = \frac{F}{A}$$



$$P = \frac{F_P}{A} \qquad \textbf{(6.4.1)}$$

F = Fuerza aplicada a la superficie
F_P = Fuerza perpendicular a la superficie
F_T = Fuerza tangente a la superficie

De la ecuación (6.4.1) podemos concluir que:

- La presión que ejerce una fuerza normal sobre un área determinada es directamente proporcional a la fuerza
- La presión que ejerce una fuerza normal sobre un área determinada es inversamente proporcional al área

Unidades: La presión es una magnitud escalar, cuyas unidades son las de una fuerza divididas por las de área:

En el SI: $\frac{F}{A} = P$

$$\left[\frac{N}{m^2}\right] = Pa\ (Pascal)$$

En el CGS: $\frac{F}{A} = P$

$$\left[\frac{dina}{cm^2}\right] = \text{baria}$$

En el técnico: $\frac{F}{A} = P$

$$\left[\frac{kgf}{m^2}\right]$$

Equivalencias:

1 Pa = 10 barias
1 bar = 10^6 barias
1 milibar = 10^3 barias = 100 Pa

Posteriormente se tratará sobre otras unidades y formas de determinar la presión

Dimensiones:

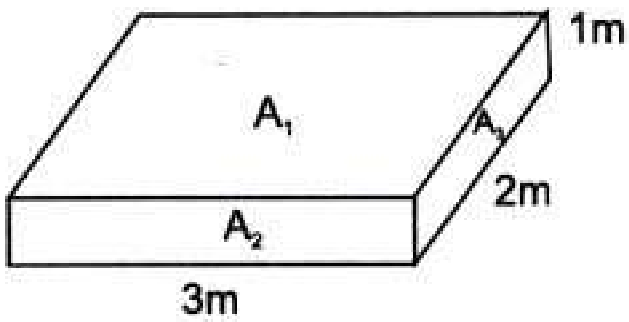
$$P = \frac{F}{A}$$

$$[P] = \frac{[MLT^{-2}]}{[L^2]}$$

$$[P] = [ML^{-1}T^{-2}]$$

Ejemplos.

1.- El bloque de la figura tiene una densidad de $3.2 g/cm^3$. Determinar:
a) El peso del cuerpo
b) La presión que ejerce el cuerpo sobre el piso cuando está apoyando sobre las caras A_1, A_2, A_3.



a) $\rho = \dfrac{m_c}{V_c}$

$m_c = \rho_c \cdot V_c$
$m_c = 3{,}2\ g/cm^3 \ .\ 300\ cm.\ 200\ cm.\ 100\ cm$
$m_c = 19200000\ g$
$m_c = 19200\ kg$
$mg = 19200\ kg.\ 9{,}8\ m/s^2$
$mg = 188160\ (N)$

b) $P_1 = \dfrac{mg}{A_1} = \dfrac{188160\ (N)}{3m\ .\ 2m} = 31360\ Pa$

$P_2 = \dfrac{mg}{A_2} = \dfrac{188160\ (N)}{3m\ .\ 1m} = 62720\ Pa$

$P_3 = \dfrac{mg}{A_3} = \dfrac{188160\ (N)}{2m\ .\ 1m} = 94080\ Pa$

2.- Una bala sale del cañón de un fusil con una rapidez de 350 m/s en 1/100 de segundo. Si la bala tiene una masa de 20g y un radio de 4.5mm, hallar:
a) La aceleración de la bala
b) La fuerza ejercida sobre la bala
c) La presión que ejercen los gases de la pólvora en la base del proyectil

a) $v = \cancel{v_0}^{\,0} + a\,.\,\Delta t$

$$a = \frac{V}{\Delta t_r} = \frac{350\ m/s^2}{(1/100)\ s}$$

$$a = 35000\ m/s^2$$

b) $F = m\,.\,a$

$$F = 0{,}02\ kg\,.\,35000\ m/s^2$$
$$F = 700\ (N)$$

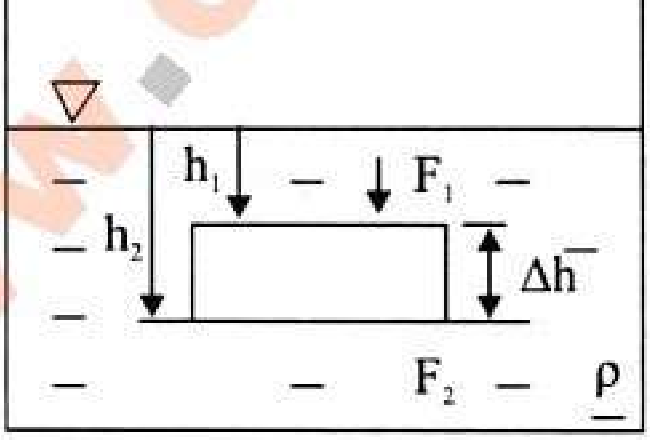
c) $$P = \frac{F}{A} = \frac{700\ N}{\pi\ R^2} = \frac{700\ N}{\pi\ (0.0045\ m)^2}$$

$$P = 11 \times 10^6\ Pa$$

6.4.1 PRESION HIDROSTATICA

Los flujos ejercen fuerza sobre todos los objetos que en él se sumergen y sobre las paredes de los recipientes que los contienen.

Para determinar el valor de la presión sobre un punto en el interior de un fluido en equilibrio, hay que considerar un elemento (del fluido) en forma cilíndrica, de altura Δh y de área A, como se muestra en la figura:



∇ = nivel libre

P_1 es la presión sobre la cara superior y P_2 la presión en la cara inferior del cilindro. Si el fluido está en equilibrio, el cilindro considerado también lo estará, consecuentemente la suma de todas las fuerza que actúan sobre él debe ser nula en todas las direcciones.

En la dirección vertical, sobre el cilindro actúan tres fuerzas.

F_1= fuerza que actúa hacia abajo sobre la superficie superior, producida por la presión P_1
$F_1 = P_1 . A$

F_2= fuerza que actúa hacia arriba sobre la superficie inferior, producida por la presión P_2
$F_2 = P_2 . A$
mg= peso del cilindro dirigido verticalmente hacia abajo:
$mg = \rho V g$, donde $V = A . \Delta h$

Aplicando la Primera Ley de Newton se tiene

$\Sigma Fy = 0$
$F_2 - F_1 - mg = 0$
$P_2 . A - P_1 . A - \rho(A . \Delta h)g = 0$ $\qquad \Delta h = h_2 - h_1$
$(P_2 - P_1) = \rho . \Delta h . g$
$(P_2 - P_1) = \rho g (h_2 - h_1)$

De lo anterior se concluye que la diferencia de presiones entre dos puntos cualesquiera dentro de un fluido, únicamente depende de la distancia vertical entre dichos puntos y de la densidad del fluido.

Si se hace coincidir la cara superior del cilindro con la superficie libre (∇) se tiene que h_1=0 y P_1= 0, donde:

$(P_2 - P_1) = \rho g (h_2 - h_1)$
$P_2 = \rho g h_2$, o para cualquier punto:
$P_H = \rho g h$ **(6.4.1.1)**

De lo anterior se puede concluir, que la presión también puede expresarse como la altura de una columna de un determinado fluido, de manera particular de un líquido.

De la ecuación (6.4.1.1) podemos concluir que:

- En todo punto interior de un fluido existe presión hidrostática
- La presión hidrostática es directamente proporcional a la profundidad bajo el nivel libre del fluido
- En todo punto interior de un fluido, la magnitud de la fuerza (debida a la presión) que ejerce sobre una superficie es la misma, independientemente de la orientación de la superficie. Si esto no fuera cierto, existiría una fuerza resultante en una dirección dada y el fluido se pondría en movimiento.
- La presión hidrostática es la misma en todos los puntos que están a un mismo nivel en el interior de un fluido.
- La fuerza sobre las superficies del recipiente debido a la presión, es siempre normal a dichas superficies.

Ejemplos.

1.- Una bomba usada para la destrucción de submarinos, tiene un dispositivo que actúa cuando la presión hidrostática es de 2.84×10^5 (Pa). Si la densidad del agua de mar es de $1.03 g/cm^3$, calcular a que profundidad explota:

$\rho = 1{,}03\ g/cm^3 = 1030\ kg/m^2$

$P_H = \rho.g.h$

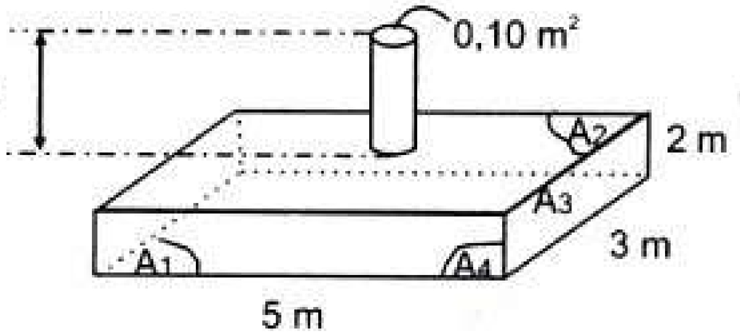
$$h = \frac{P_H}{\rho g} = \frac{2{,}84 \times 10^5\ (Pa)}{1030 (kg/m^3)\ 9{,}8\ (m/s^2)}$$

$h = 28{,}14 m$

2.- El tanque de la figura está totalmente lleno de aceite vegetal ($\rho = 0.92 g/cm^3$). Hallar:

a) La presión hidrostática en cada una de las caras del tanque

b) La fuerza sobre cada una de las caras mencionadas.



$\rho = 0.92 g/cm^3 = 920\ kg/m^3$

a) La presión hidrostática en el fondo es:
$P_{H1} = \rho g h_1$
$P_{H1} = 920 kg/m^3 \,.\, 9,8\, m/s^2 \,.\, 3,2m$
$P_{H1} = 28851,2\, Pa$

La presión hidrostática en la tapa es:
$P_{H2} = \rho g h_2$
$P_{H2} = 920 kg/m^3 \,.\, 9,8\, m/s^2 \,.\, 1,2m$
$P_{H2} = 10819,2\, Pa$

La presión hidrostática sobre las paredes laterales es:
$P_{H3} = \rho g h_3$
$P_{H3} = 920 kg/m^3 \,.\, 9,8\, m/s^2 \,.\, 2,2m$
$P_{H3} = 19835,2\, Pa$

b) La fuerza en el fondo es:
$F_1 = P_{H1}.A_1$
$F_1 = 28851,2\, (Pa) \,.\, 5m \,.\, 3m$
$F_1 = 432768\, (N)$

La fuerza sobre la tapa.
$F_2 = P_{H2}.A_2$
$F_2 = 10819,2\ (Pa) \,.\, [(5m \,.\, 3m)\text{-}0,10\, m^2]$
$F_2 = 161206,08\ (N)$

La fuerza sobre la pared lateral izquierda o derecha es:
$F_3 = P_{H3}.A_3$
$F_3 = 19835,2\ (Pa) \,.\, 3m \,.\, 2m$
$F_3 = 119011,2\ (N)$

La fuerza sobre la pared lateral frontal o posterior es:
$F_4 = P_{H4}.A_4$
$F_4 = 19835,2\ (Pa) \,.\, 5m \,.\, 2m$
$F_4 = 198352\, (N)$

6.4.2 PRESION ATMOSFERICA

La atmósfera es una capa de aire que rodea la Tierra, por lo tanto ejerce una presión en todas las direcciones sobre cualquier punto en su interior. Esta presión es igual al peso de la columna de aire que exista sobre ese punto.

Experimentalmente se ha demostrado que la presión atmosférica (Po) a nivel del mar es igual a la presión que ejerce una columna de 76cm de mercurio.

A este valor también se le denomina presión de una atmósfera:

1 atmósfera = 76 cm deHg
1 atm = 1.033 kgf/cm^2
1 atm = 1,013 x 10^6 barias
1 atm = 1013 mb (milibares)
1 atm = 1,013 x 10^5 Pa
1 atm = 14,7 psi ($lbf/pulg^2$)

Si en lugar de mercurio se utilizará agua, la altura que alcanzaría la columna sería:

$Po = \rho g h$

$$h = \frac{Po}{\rho g} = \frac{1{,}013 \times 10^6\ Pa}{1 g/cm^3 \cdot 9{,}8\ m/s^2}$$

h= 10,33m

Como la presión atmosférica es debida al peso de la columna de aire, ésta será variable de acuerdo a la altitud del lugar. De manera general la presión atmosférica es menor mientras mayor sea la altura de la región donde ésta se mida, pero no es una relación lineal, ya que está determinada por el cambio de la densidad del aire con la temperatura.

En Quito, la presión atmosférica tiene un valor de 540 mm de Hg.

La presión atmosférica se mide con aparatos denominados barómetros, por lo que a esta presión también se le denomina barométrica.

6.4.3 PRESION ABSOLUTA

La presión puede expresarse en base a una referencia cualesquiera arbitraria, siendo las más usuales el cero absoluto (vacío absoluto) y la presión atmosférica local.

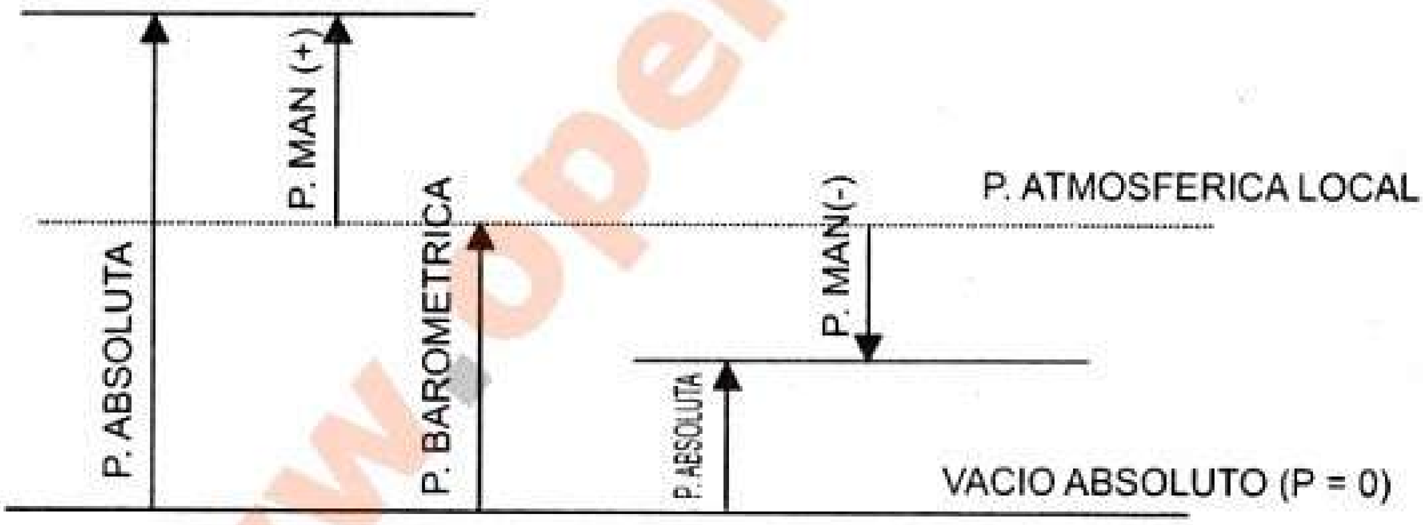
Si el valor de una presión se expresa como una diferencia entre su valor y el vacío absoluto, se dice que ésta es la presión absoluta.

6.4.4 PRESION MANOMETRICA

Esta presión es determinada por instrumentos denominados manómetros y su valor es a la diferencia entre el valor de la presión absoluta y el de la atmosférica del lugar.

6.4.5 ESCALAS DE MEDIDA DE PRESION

La interrelación entre las escalas de medida de la presión puede representarse en el siguiente gráfico:



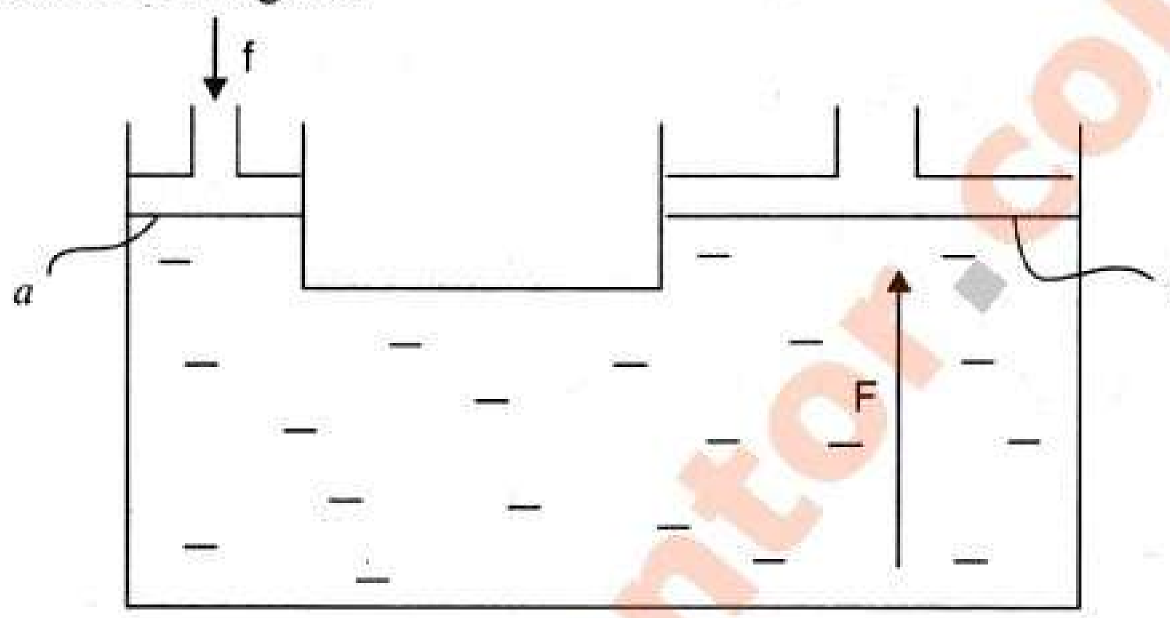
Generalmente cuando se hace referencia al valor de una presión, por ejemplo de la presión de un caldero, de los neumáticos de un vehículo, etc. Se trata de la presión manométrica, a menos que se especifique como absoluta.

En el caso de que se haga referencia a la presión atmosférica de un lugar, ésta constituye siempre una medida de presión absoluta.

6.5 PRINCIPIO DE PASCAL

El principio de Pascal dice que *si a un fluido incompresible que está en equilibrio se le aplica una presión P, ésta se transmite con igual intensidad a todos los puntos del fluido y a las paredes del recipiente que lo contiene.*

Una aplicación del principio de Pascal la constituye la prensa hidráulica, la misma que se representa en la figura:



Esta consiste básicamente en dos cilindros con sus respectivos pistones comunicados por un tubo transversal. En la parte inferior hay un fluido que generalmente es líquido (aceites), el mismo que transmite la presión.

Si se aplica una fuerza f en el pistón de sección a se tiene una presión P=f/a, la misma que se transmite a todos los puntos del líquido, y por tanto al pistón de sección A situado a la misma altura. Como la presión es la misma se tiene que:

$P=\frac{f}{a}=\frac{F}{A}$, de donde:

$$F=(A/a)\,.\,f \qquad \textbf{(6.5.1)}$$

De la ecuación (6.5.1) se concluye que la fuerza (F) en el pistón de sección mayor (A) en relación a la fuerza aplicada f en el pistón menor , se incrementa en un valor igual de la relación de las áreas (A/a).

En base al principio de Pascal funcionan aparatos como: sillas de dentistas, frenos de vehiculos, gatas para levantar autos, etc.

Ejemplos:

1.- En un recipiente hay dos líquidos no miscibles. El primero de ρ=0.8g/cm^3 alcanza una altura de 6cm y el segundo de ρ=0.9g/cm^3 alcanza una altura de 4cm. Determinar la presión total que ejerce sobre el fondo del recipiente y la presión absoluta cuando.
a) El recipiente se encuentra a nivel del mar
b) El recipiente se encuentra en la ciudad de Quito.

$\rho_1 = 0,8\ g/cm^3 = 800\ kg/m^3$
$\rho_2 = 0,9\ g/cm^3 = 900\ kg/m^3$

a) $P_{H1} = \rho_1 g h_1$
$P_{H1} = 800\ kg/m^3 . 9,8\ m/s^2 . 0,06m$
$P_{H1} = 470,4\ Pa$

$P_{H2} = \rho_2 g h_2$
$P_{H2} = 900 kg/m^3 . 9,8\ m/s^2 . 0,04\ m$
$P_{H2} = 352,8\ Pa$

$P_{HT} = P_{H1} + P_{H2}$
$P_{HT} = 470,4\ Pa + 352,8\ Pa$
$P_{HT} = 823,2\ Pa$

$P_{H2} = Po + P_{HT}$
$P_{H2} = 1,013x10^5 Pa + 823,2\ Pa$
$P_{H2} = 1,021\ x\ 10^5\ Pa$

b) $P_{H1} = \rho_1 g h_1$
$P_{H1} = 800\ kg/m^3 . 9,8\ m/s^2 0,06m$
$P_{H1} = 470,4\ Pa$

$P_{H2} = \rho_2 g h_2$
$P_{H2} = 900 kg/m^3 . 9,8\ m/s^2 . 0,04\ m$
$P_{H2} = 352,8\ Pa$

$P_{HT} = P_{H1} + P_{H2}$
$P_{HT} = 470,4\ Pa + 352,8\ Pa$
$P_{HT} = 823,2\ Pa$

760mm de Hg $\rightarrow$ 1,013 x 105 Pa
540mm de Hg $\rightarrow$ x

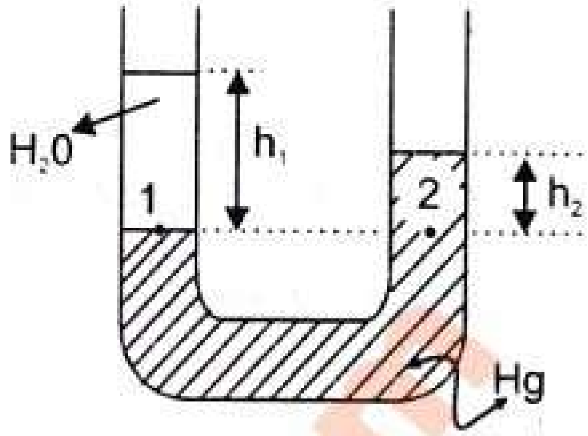
$$x = \frac{540mm\ de\ Hg.\ 1,013\ x\ 10^5 Pa}{760mm\ de\ Hg}$$

$x = 0,72\ x\ 10^5\ Pa$

$P = Po + P_{HT}$
$P = 0,72\ x\ 10^5\ Pa + 823,2\ Pa$
$P = 0,728\ x\ 10^5\ Pa$

2.- En un tubo en U que contiene mercurio (13.6g/cm^3) se introducen 50cm^3 de agua. Si la sección del tubo es 2cm^2, calcular:
a) La altura de la columna de agua en el tubo
b) La diferencia de niveles entre los dos líquidos

$\rho_1 = 1 g/cm^3$
$\rho_2 = 13{,}6 g/cm^3$



a) $V_1 = Ah_1$

$$h_1 = \frac{V_1}{A} = \frac{50\ cm^3}{2\ cm^2}$$

$h_1 = 25 cm$

b) $P_1 = P_2$

$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$

$$h_2 = \frac{\rho_1 h_1}{\rho_2} = \frac{1 g/cm^3 \cdot 25 cm}{13{,}6 g/cm^3}$$

$h_2 = 1{,}84 cm$
$h_1 - h_2 = 25cm - 1{,}84cm$
$h_1 - h_2 = 23{,}16 cm$

3.- En un tubo en U que inicialmente contiene mercurio ($13.6g/cm^3$) se introducen 80g de agua por una rama de sección $5cm^2$. Qué volumen de alcohol ($0.8g/cm^3$) se debe introducir por la otra rama de sección $3cm^2$, para que los niveles de mercurio se igualen.

$V_1 = A_1 h_1$

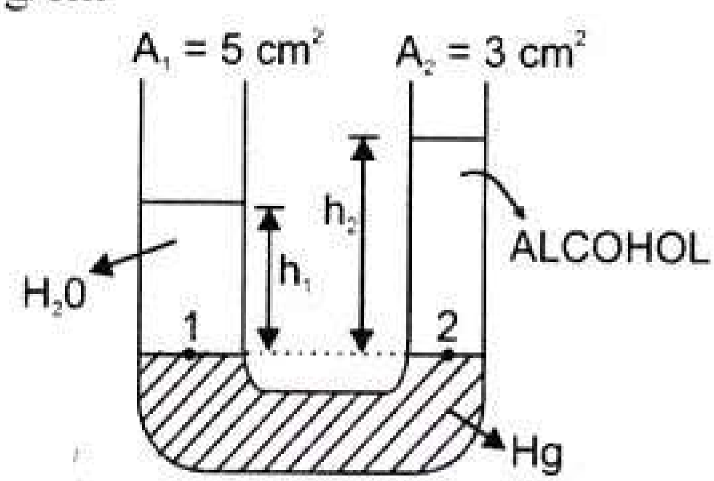
$V_1 = 80g$ de $H_2O = 80 cm^3$

$$h_1 = \frac{V_1}{A_1} = \frac{80cm^3}{5\ cm^2}$$

$\rho_1 = 1g/cm^3$

$h_1 = 16 cm$

$\rho_2 = 0{,}8g/cm^3$



$P_1 = P_2$

$\rho_1 g h_1 = \rho_2 g h_2$

$$h_2 = \frac{\rho_1 h_1}{\rho_2} = \frac{1g/cm^3 \cdot 16 cm}{13{,}6 g/cm^3}$$

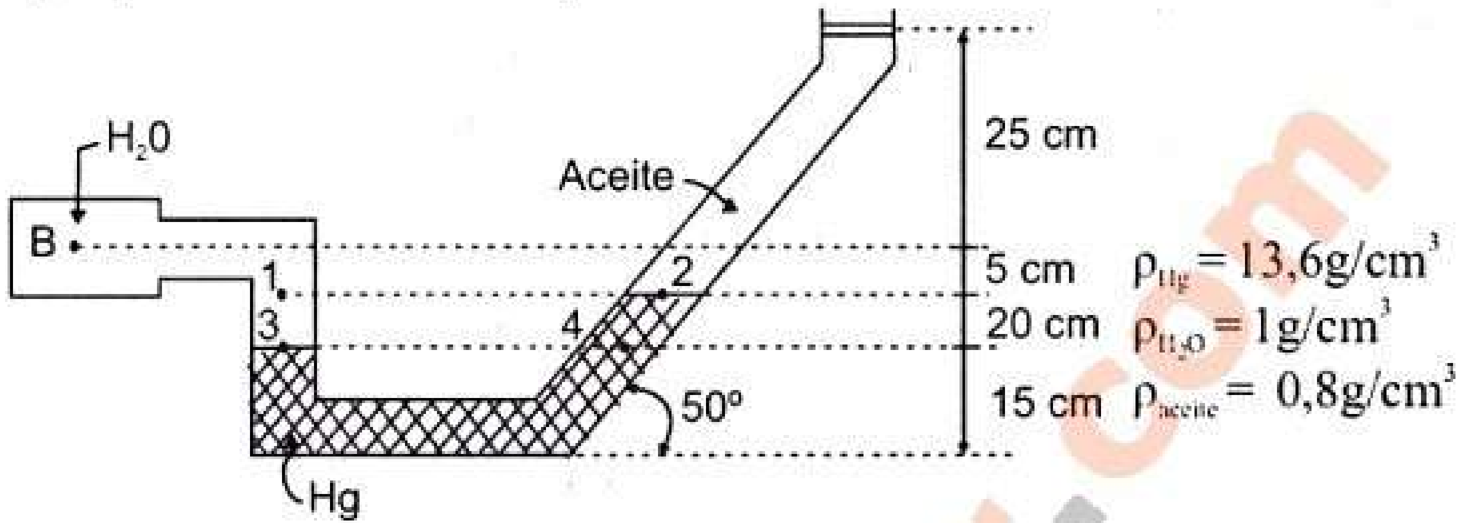
$h_2 = 20 cm$
$V_2 = A_2 h_2$
$V_2 = 3cm^2 \cdot 20 cm$

$V_2 = 60 cm^3$

4.- El tubo de la figura tiene una sección constante de $6cm^2$. Si se aplica una fuerza de 12(N) en el pistón que indica la figura, determinar:

a) Si la presión absoluta en los puntos 1 y 2 es igual

b) La presión absoluta en el punto B



a) La presión absoluta en los puntos 1 y 2 no es igual porque los líquidos en éstos puntos son diferentes (así estén a una misma altura).

b) La presión absoluta en los puntos 3 y 4 es igual, porque los puntos están a una misma altura y en un mismo líquido.

$P_3 = P_4$

$P_B + P_{H_2O} = P_{Hg} + P_{aceite} + P_{pistón} + P_0$

$P_B = \rho_{Hg} \cdot g \cdot h_{Hg} + \rho_{ac} \cdot g \cdot h_{ac} + F/A + P_0 - \rho_{H_2O} \cdot g \cdot H_{H_2O}$

$P_B = 13600\ Kg/m^3 \cdot 9,8\ m/s^2 \cdot 0,2m + 800\ kg/m^3 \cdot 9,8\ m/s^2 \cdot 0,3m +$
$12(N)/0,0006m^2 + 1,013 \times 10^5\ Pa - 1000kg/m^3 \cdot 9,8\ m/s^2 \cdot 0,25m$

$P_B = 26656\ Pa + 2352\ Pa + 20000\ Pa + 1,013 \times 10^5\ Pa - 2450\ Pa$

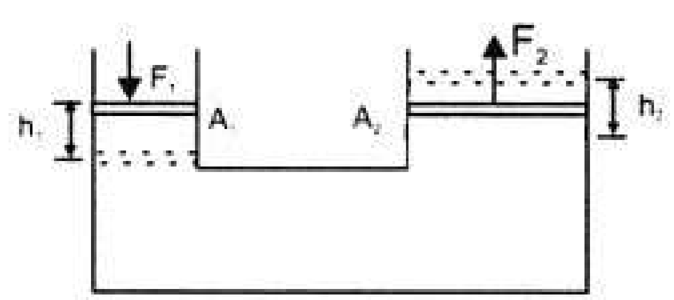
$P_B = 1,478 \times 10^5\ Pa$

5.- En la prensa hidráulica de la figura, las áreas de los pistones son $A_1 = 4cm^2$ y $A_2 = 20cm^2$. Cuando se aplica una fuerza $F_1 = 500$ (N) al pistón pequeño éste recorre 15cm. Calcular:

a) la fuerza que se obtiene en el pistón mayor

b) la altura que sube el pistón mayor

c) la ventaja mecánica, si el rendimiento es del 75%



a) Las presiones en los dos pistones son iguales

$$P_1 = P_2$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2} \Rightarrow F_2 = \frac{F_1 . A_2}{A_1} = \frac{500(N) \ . \ 20 \ cm^2}{4 \ cm^2}$$

$$F_2 = 2500(N)$$

b) Los volúmenes de líquido desplazado por los pistones son iguales:

$$V_1 = V_2$$
$$A_1 h_1 = A_2 h_2$$

$$h_2 = \frac{A_1 h_1}{A_2} = \frac{4cm^2 \ . \ 15 \ cm}{20 \ cm^2}$$

$$h_2 = 3 \ cm$$

c) Si el rendimiento es del 75% la fuerza útil es:

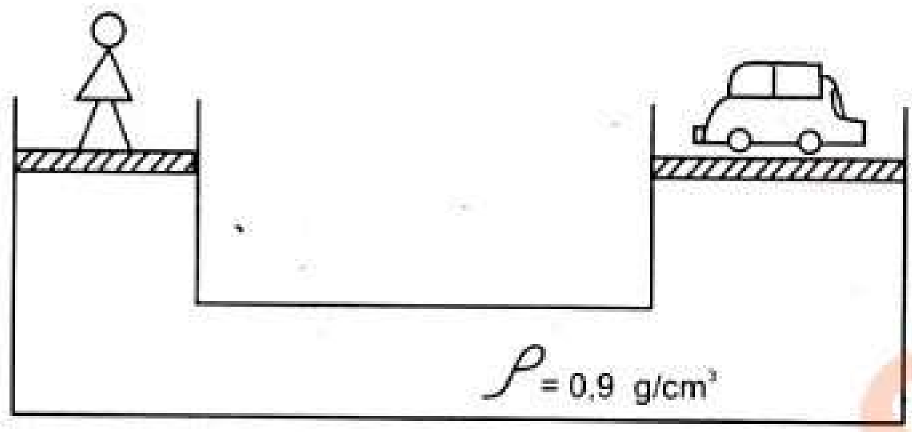
$$F_2' = 0{,}75 \ F_2$$
$$F_2' = 0{,}75 \ (2500N)$$
$$F_2' = 1875 \ (N)$$

Por lo tanto, la ventaja mecánica es:

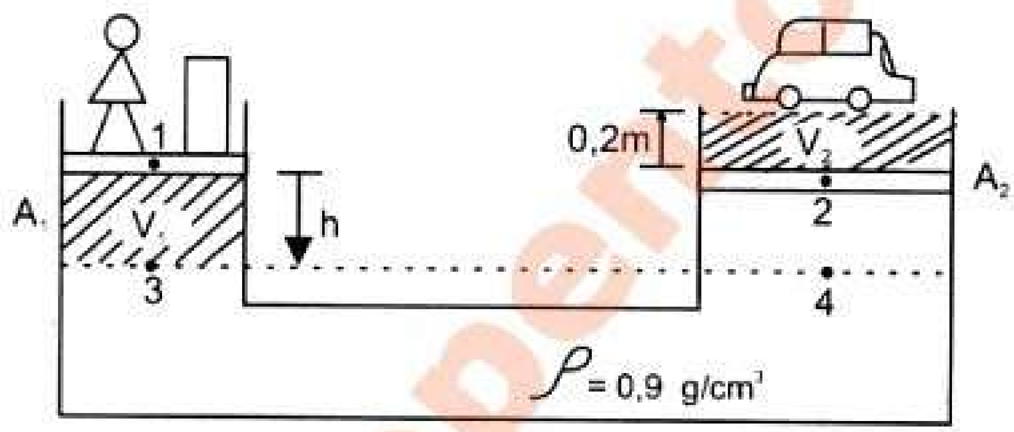
$$V.M. = \frac{F_2'}{F_1} = \frac{1875 \ (N)}{500 \ (N)}$$

$$V.M. = 3{,}75$$

6.- En la prensa hidráulica de la figura se mantiene en equilibrio un hombre de masa 65kg con un automóvil de masa 800kg. Si el área del pistón pequeño es $30cm^2$, determinar :



a) El área del pistón mayor
b) Qué peso se debe añadir al pistón pequeño para que el auto suba una distancia de 0.2m



$P_1 = P_2$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$A_2 = \frac{F_2 . A_1}{F_1} = \frac{800(kgf)\ .\ 30\ cm^2}{65\ kgf}$$

$A_2 = 369,23\ cm^2$

b) $V_1 = V_2$

$A_1 h = A_2 .\ 0,2\ m$

$$h = \frac{A_2 0,2m}{A_1} = \frac{369,23cm^2\ .\ 0,2\ m}{30\ cm^2}$$

$h = 2,46m$

$$P_3 = P_4$$

$$\frac{(mg)_1 + mg}{A_1} = \frac{(mg)_2}{A_2} + \rho g\,(h + 0{,}2m)$$

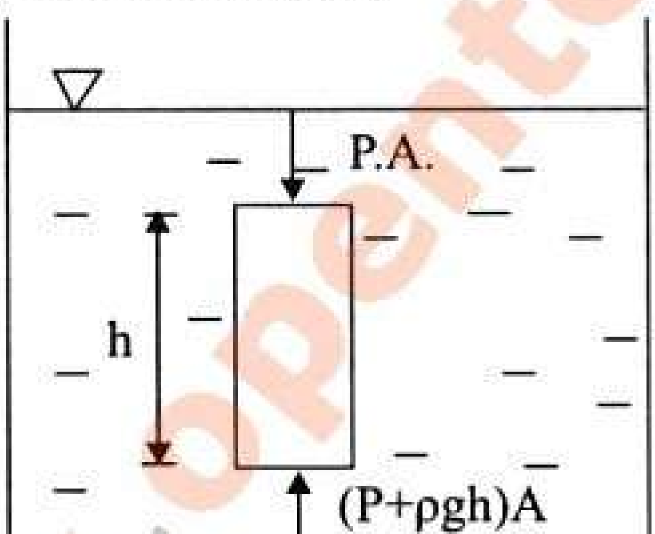
$$\frac{(65kg.9{,}8\ m/s^2)_1 + mg}{30\ cm^2} = \frac{800kg.9{,}8\ m/s^2}{0{,}036923\ m^2} + 900\ kg/m^3 . 9{,}8\ m/s^2 . 2{,}66m$$

$$\frac{637(N) + mg}{0{,}0030\ m^2} = (212333{,}78 + 23461{,}2)\ Pa$$

$$637(N) + mg = 707{,}38\,(N) \Rightarrow mg = 70{,}38\,(N)$$

6.6 PRINCIPIO DE ARQUIMIDES

Para demostrar este principio supondremos que un cilindro de sección A y altura h está sumergido en un fluido de densidad ρ:



La presión en la cara superior es (P) y en la cara inferior (P+ ρgh).

La fuerza resultante que el líquido realiza sobre el cilindro es una fuerza vertical dirigida hacia arriba, dada por.

$F_{LIQUIDO/CILINDRO} = (P + \rho gh)\,A - PA = \rho ghA$

Como el volumen del cilindro es V= h. A, tendremos:

$F_{LIQUIDO/CILINDRO} = \rho g.V$, a esta fuerza se denomina empuje

$E_{MPUJE} = \rho.g.\ V$ **(6.6.1)**

En base a lo anterior, el principio de Arquímedes dice que *un cuerpo parcial o totalmente sumergido en un fluido, recibe de éste una fuerza hacia arriba (empuje), que es igual al peso del volumen de fluido desalojado.*

De lo expuesto se concluye que el empuje depende únicamente de la densidad del fluido y del volumen sumergido del cuerpo.
Si un cuerpo se coloca en el interior de un fluido tendría las opciones de flotar o sumergirse; flotará si la densidad de éste es menor que la del fluido y se sumergirá si es igual o mayor.

Ejemplos.

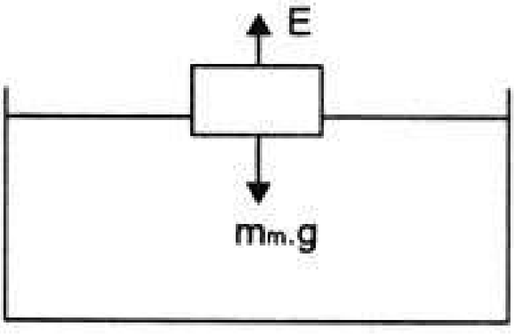
1.- Un bloque de madera de masa 1.8kg flota en el agua con un 60% de su volumen sumergido. Determinar :
   a) La densidad de la madera
   b) Qué masa de acero hay que colocar sobre el bloque de madera para que éste se sumerja completamente.

a) $E = mg$

$$\rho_{agua} \cdot g \cdot V_s = V_m \cdot \rho_m \cdot g; V_s = 0{,}6\, V_m$$

$$\rho_m = \frac{\rho_{agua} \cdot V_s}{V_m} = \frac{\rho_{agua} \cdot 0{,}6V_m}{V_m} = 0{,}6\, \rho_{agua}$$

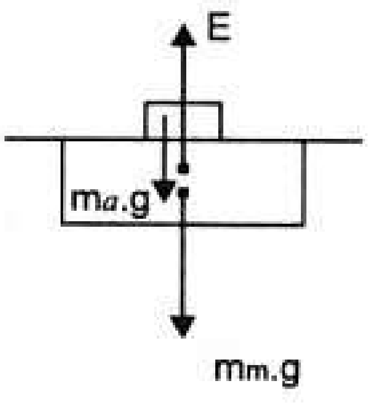
$$\rho_m = 0{,}6\,(1 g/cm^3)$$



$$\rho_m = 0{,}6\ g/cm^3$$

b) $$V_m = \frac{m_m}{\rho_m} = \frac{1800\ g}{0{,}6\ g/cm^3}$$

$$V_m = 3000\ cm^3$$
$$E = m_{acero} \cdot g + m_m \cdot g$$
$$\rho_{agua} \cdot g \cdot V_m = m_{acero} \cdot g + (\rho_m \cdot V_m)g$$
$$m_{acero} = (\rho_{agua} - \rho_m)V_m$$



$$m_{acero} = (1\text{-}0{,}6)\ g/cm^3 \cdot 3000\ cm^3$$
$$m_{acero} = 1200\ g$$
$$m_{acero} = 1{,}2\ kg$$

2.- Una esfera de plomo de radio 2cm se coloca en la superficie del agua de una piscina, determinar:

a) El valor de empuje que actúa sobre la esfera

b) La fuerza neta que actúa sobre la esfera

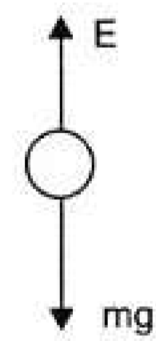
c) En que tiempo la esfera llegará al fondo de la piscina, si ésta tiene una profundidad de 2m.

d) Cuál será el valor de la normal que actúe sobre la esfera cuando ésta se encuentre en el fondo de la piscina.

a) Como la densidad del plomo es mayor que la del agua, la esfera se sumerge, entonces el volumen sumergido es el volumen de la esfera.

$E = \rho_{H2O} \,.\, Vs \,.\, g$
$E = 1\ g/cm^3 \,.\, 4/3\,\pi\,(2)^3\,cm^3 \,.\, 980\ cm/s^2$
$E = 32840{,}12$ dinas
$E = 0{,}328$ (N)

b) Sobre la esfera actúan dos fuerzas, el empuje y su peso.

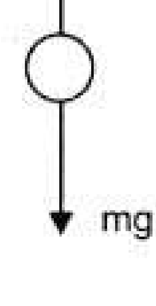


$E = 0{,}328$ (N)

$mg = V.P \,.\, g$
$mg = 4/3\,\pi\,(2)^3\,cm^3 \,.\, 11{,}34\ g/cm^3 \,.\, 980\ cm/s^2$
$mg = 372406{,}91$ dinas
$mg = 3{,}724$ (N)

Como el peso es mayor que el empuje entonces la esfera se acelera hacia el fondo de la piscina y la fuerza es:

$\Sigma Fy = F_{NETA}$
$E - mg = 0{,}328\ (N) - 3{,}724\ (N)$
$E - mg = -3{,}4$ (N)



$\vec{F}_{NETA} = -3{,}4\ \vec{j}$ (N)
$F_{NETA} = -3{,}4 \times 10^5$ dinas

c) $\upsilon_o = 0$

$y = -2(m)$

$\Sigma Fy = m.a$

$-3{,}4 \times 10^5 \text{ dinas} = [4/3\pi(2\text{ cm})^3].11{,}34 \text{ g/cm}^3 . a_y$

$$a_y = \frac{-3{,}4.10^3 \text{ dinas}}{4/3\pi(8\text{cm}^3).11{,}34\text{g/cm}^3}$$

$a_y = -894{,}7 \text{ cm/s}^2 = -8{,}94 \text{ m/s}^2$

$\vec{a}_y = -8{,}94\,\vec{j}\,(\text{m/s}^2)$

$y = \upsilon_o . \Delta t + ½\, a_y . \Delta t^2$ $\qquad$ $\Delta t^2 = \dfrac{-4 \text{ m}}{8{,}94\text{m/s}^3}$

$-2\text{m} = ½(-8{,}94 \text{ m/s}^2)\Delta t^2$ $\qquad$ $\Delta t = 0{,}67 \text{ s}$

d) $\Sigma Fy = 0$

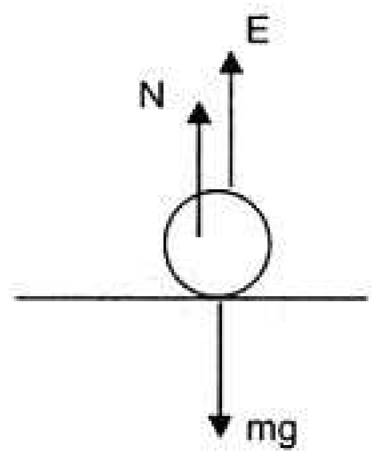
$E + N - mg = 0$

$N = mg - E$

$N = 3{,}724\,(N) - 0{,}328\,(N)$

$N = 3{,}4\,(N)$

$\vec{N} = 3{,}4\ \vec{j}\ (N)$



3.- Una pelota de ping-pong de 1.8cm de radio es sumergida hasta el fondo en un recipiente lleno de alcohol, donde se abandona partiendo del reposo. Si la altura del recipiente es de 50cm, y la densidad de la pelota es 300kg/m^3, determinar:

a) El valor del empuje del alcohol sobre la pelota.

b) La velocidad con que llega la pelota a la superficie libre del alcohol

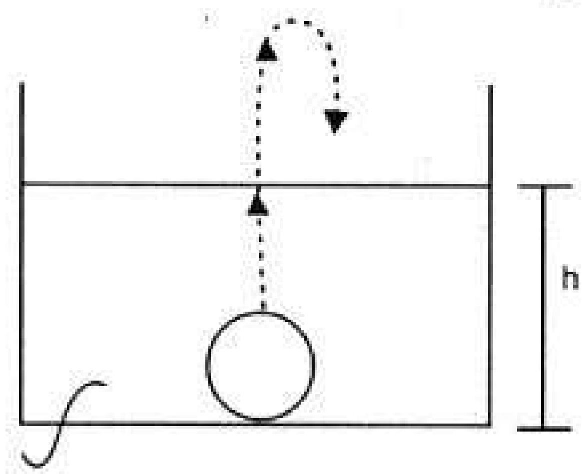
c) La altura máxima alcanzada por la pelota en relación al fondo del recipiente

$r = 0{,}018 \text{ m}$

$h = 0{,}5 \text{ m}$

$\rho_p = 300 \text{ kg/m}^3$

$\rho_a = 800 \text{ kg/m}^3$



a) $E = \rho_a \cdot Vs \cdot g \; ; V_p = Vs$

$E = 800 kg/m^3 \cdot 4/3\pi\,(0{,}018 m)^3 \cdot 9{,}8\, m/s^2$

$E = 0{,}19\,(N)$

b) $mg = \rho_p \cdot V_p \cdot g$

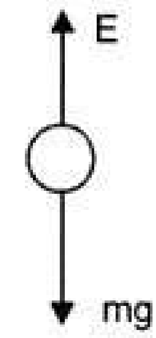
$mg = 300\, kg/m^3 \cdot 4/3\pi\,(0{,}018 m)^3 \cdot 9{,}8\, m/s^2$

$mg = 0{,}07\,(N)$

Como el empuje es mayor al peso, la pelota asciende aceleradamente.

$\Sigma Fy = m_p \cdot a$

$E - mg = m_p \cdot a$



$$a = \frac{E - mg}{m_p} = \frac{E - mg}{\rho_p \cdot V_p}$$

$$a = \frac{(0{,}19 - 0{,}07)(N)}{300\, kg/m^3 \cdot 4/3\pi(0{,}018 m)^3}$$

$a = 16{,}37\,(m/s^2)$

$\upsilon_S^2 = \upsilon_o^2 + 2a.h$

$\upsilon_S^2 = 2.16{,}37\, m/s^2 \;.\, 0{,}5\, m$

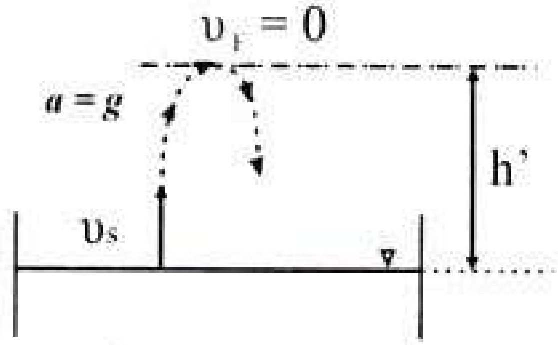
$\upsilon_S^2 = 16{,}37\, m^2/s^2$

$\upsilon_S = 4{,}05\;\; m/s$

c) $\upsilon_S^2 = \upsilon_F^2 + 2gh'$

$(4{,}05\, m/s)^2 = 2(9{,}8\, m/s^2)\, h'$

$$h' = \frac{16{,}37\, m^2/s^2}{19{,}6\, m/s^2}$$



$h' = 0{,}84\, m$

En relación al fondo:
$H = h + h'$
$H = 0,5\,m + 0,84m$
$H = 1,34m$

6.7 EJERCICIO No. 9

1.- Una habitación de 5m de largo, 4m de ancho y 3m de alto contiene aire, calcular:
a) El volumen de aire contenido en la habitación
b) El peso del aire contenido en la habitación

2.- Un cilindro de 45.7kg de masa tiene un radio de 15cm. Si su densidad es $2.7\ g/cm^3$. Hallar:
a) El volumen del cilindro
b) La altura del cilindro

3.- Un recipiente se llena totalmente con 1218g de aceite vegetal, se vacía y se vuelve a llenar con alcohol, determinar:
a) El volumen del recipiente
b) El peso del alcohol

4.- Una persona de 65kg de masa se encuentra en pie. Si cada una de las suelas de sus zapatos tiene un área de $190\ cm^2$, hallar:
a) La fuerza que ejerce la persona sobre el piso.
b) La presión que ejerce la persona sobre el piso, cuando está parada sobre los dos pies
c) La presión que ejerce la persona sobre el piso, cuando está parada en un solo pie.
d) La presión que ejerce la persona sobre el piso, cuando está parada sobre los dos pies y utiliza zapatos para la nieve de $380\ cm^2$ de área cada uno.

5.- Un zapato de fútbol tiene 13 toperoles, cada uno con un área de $1.5cm^2$ cuando están en contacto con el piso. El momento que un futbolista de 72kg de masa parte a velocidad, se ponen en contacto con el piso 9 toperoles. Determinar:
a) El área de contacto con el piso.
b) La presión que ejercen los toperoles sobre el piso

6.- Un fusil dispara un proyectil de 120g y 1cm de diámetro. Si el proyectil recorre el cañón de 1,2m de longitud en 2/100 de seg., calcular:
a) La aceleración del proyectil
b) La fuerza que actúa sobre el proyectil
c) La presión que ejercen los gases de la pólvora en la base del proyectil.

7.- En un pozo de petróleo se inyecta agua para el petróleo suba a la superficie. Si el pozo tiene una profundidad de 1800m, calcular la presión que debe tener el yacimiento de petróleo para que tenga flujo natural (llegue justamente a la superficie) , despreciando las pedidas de fricción en la tubería.

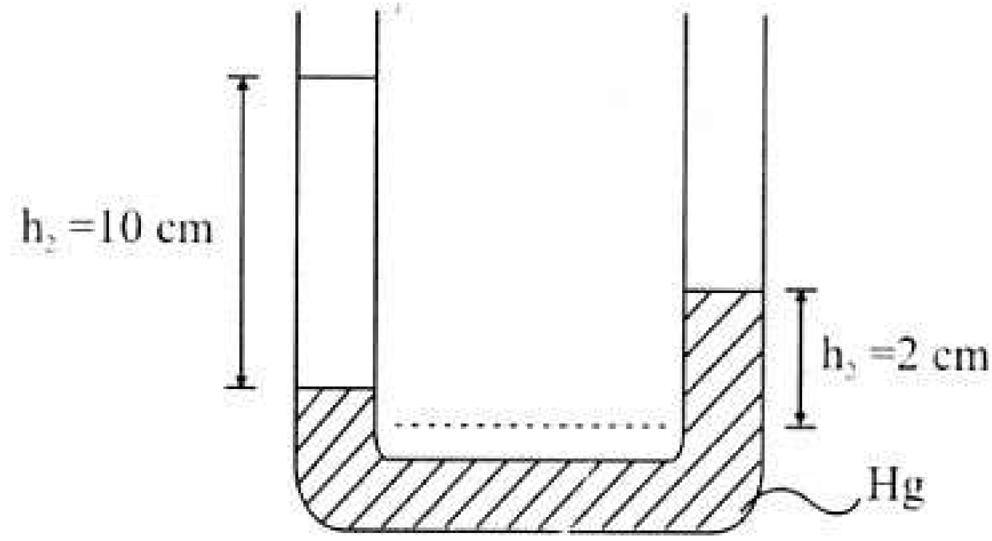
8.- Un recipiente cilíndrico se llena completamente con 6000kg de agua. Si la presión hidrostática en el fondo del tanque es $0.2kg/cm^2$, determinar:
a) El radio de la base del recipiente
b) La altura que tiene el recipiente

9.- Un recipiente cilíndrico cuya base tiene un radio de 10cm, contiene mercurio hasta una altura de 14 cm y sobre él agua con una altura de 8cm. Calcular:
a) La presión absoluta en un punto situado a 7cm, 14cm, 18cm y 22cm del fondo.
b) la presión absoluta y la fuerza total en el fondo

10.- Un caldero que contiene gas a una presión de 5 atmósferas, tiene una válvula de seguridad de 5mm de radio. Hallar:
a) El área de la válvula de seguridad.
b) la fuerza con que acciona el gas a la válvula de seguridad.

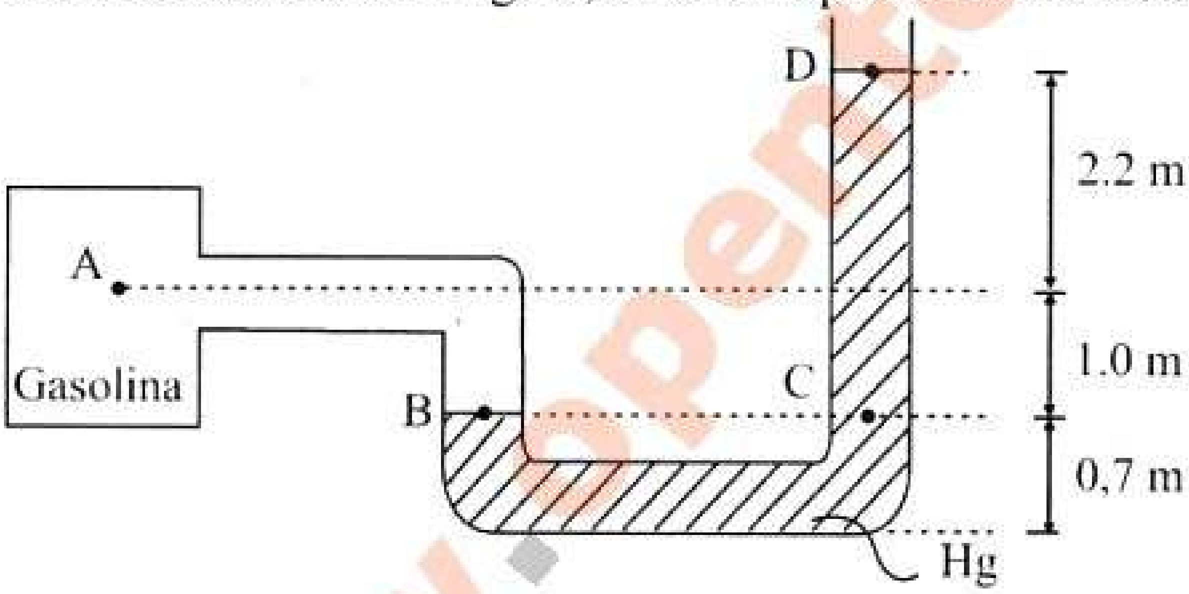
11.- Un lago existe un líquido de densidad 1.01 g/cm^3 , calcular en que profundidad la presión absoluta es el triple de la presión atmosférica.

12.- En un tubo U de sección $6cm^2$ que contiene mercurio se introduce por una de las ramas un líquido de densidad desconocida. Teniendo en cuenta las alturas que se dan en la figura, hallar:
a) La densidad del líquido desconocido
b) El peso del líquido desconocido



13.- En un tubo en U de sección $4cm^2$ se coloca 1000g de mercurio y 1000g de agua. Hallar:
a) La diferencia de altura en las columnas de mercurio
b) La diferencia de altura en los niveles libres de los los dos ramales

14.- En el manómetro de la figura, calcular la presión manométrica en el punto A.



15.- En un tubo U las secciones rectas están en relación de 1/5. en la rama estrecha se introduce mercurio hasta un punto situado a 20cm de la boca del tubo. Si esta rama se llena totalmente de agua, determinar la altura que desciende el mercurio.

16.- En un tubo U de sección recta uniforme, se introduce agua por un ramal y por el otro 18g de otro líquido no miscible, con lo cual el agua se desplaza 32cm. Calcular el radio del tubo.

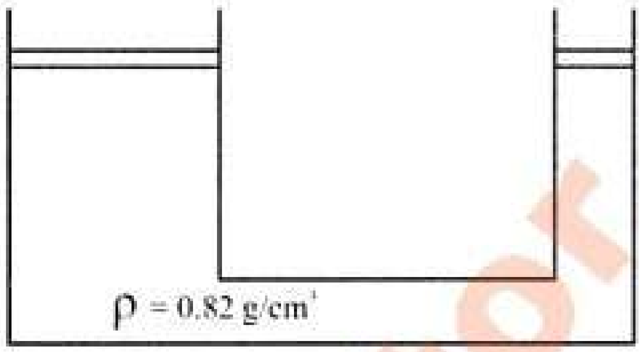
17.- En un tubo en U de sección recta uniformemente, se introduce por el un ramal un líquido de densidad 0.95 g/cm^3 y por otro 52g de otro líquido no miscible, con lo cual el primero alcanza una altura igual al diámetro del tubo. Determinar el radio del tubo.

18.- En la figura, los pistones tienen diámetros de 5cm y 30cm respectivamente. Calcular:

a) Qué fuerza debe aplicarse al pistón pequeño, para sostener a un mismo nivel un automóvil de 1000kg en el pistón mayor.

b) La altura que sube el pistón mayor cuando se aplica una fuerza de 420 (N) en el pistón pequeño.

c) El trabajo realizado sobre el pistón pequeño para que el pistón grande suba 1.2m.



19.- Resolver el problema anterior, si los pesos de los pistones son 20 (N) y 7200 (N) respectivamente.

20.- Un elevador de carros tiene pistones de 10cm^2 y 400cm^2 respectivamente. Cuando sobre el menor se hace una fuerza de 500 (N), hallar:

a) El peso teórico que puede elevar el pistón mayor.

b) El peso que puede elevar el pistón mayor, si el rendimiento del mecanismo es del 85%.

21.- Un bloque de madera flota en agua dulce, dejando fuera de ella 3cm. Cuando se le pone en glicerina, quedan fuera de éste líquido 4,2cm. Determinar:

a) La densidad de la madera

b) La altura del bloque de madera

22.- Un cubo de 10cm de artista (0.86 g/cm^3) flota en agua dulce. Calcular:

a) El espesor de la mínima capa de aceite (0.6 g/cm^3) que debe añadirse para cubrir totalmente el bloque

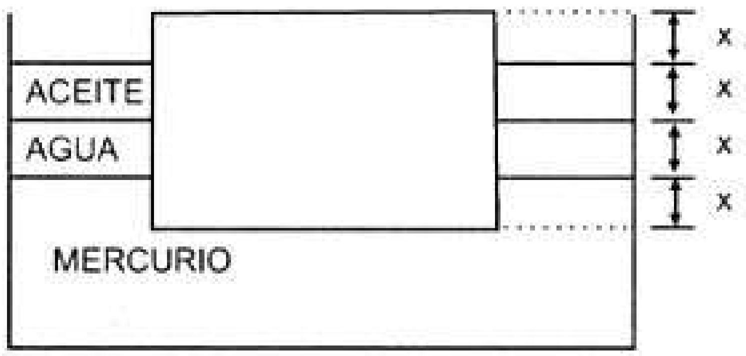
b) La fuerza hidrostática ejercida en la cara inferior, cuando está dentro de los dos líquidos.

23.- Sobre la superficie del agua de un recipiente se vierte una capa de gasolina de 3cm de altura en la cual se coloca un cuerpo de 15cm de altura y densidad $1.7\ g/cm^3$. Calcular:

a) La altura sumergida en el agua

b) La altura del cuerpo que está emergiendo

24.- Un cubo de 20cm de arista está colocado en el recipiente de la figura Determinar la densidad del cubo.



$x = 5\ cm$

$\rho_{Hg} = 13{,}6\ g/cm^3$

$\rho_{agua} = 1\ g/cm^3$

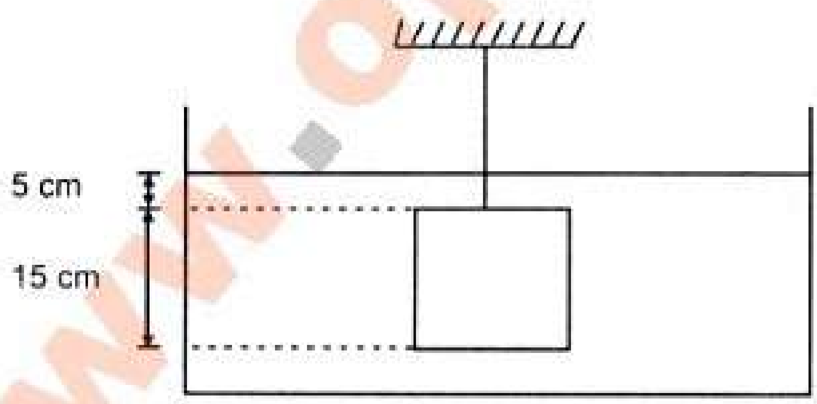
$\rho_{aceite} = 0{,}8\ g/cm^3$

25. En la figura el cuerpo tiene forma de cubo y tiene una masa de 500 kg en el vacío. Si se suspende mediante una cuerda dentro de un líquido de densidad $0.9\ g/cm^3$, calcular:

a) la fuerza ejercida por el líquido sobre la cara superior del cuerpo

b) la fuerza ejercida por el líquido sobre la cara inferior del cuerpo.

c) La tensión de la cuerda que sostiene el cuerpo.



26.- Una esfera de corcho de $50cm^3$ de volumen, flota en agua con 1/5 de su volumen sumergido. Calcular

a) La densidad del corcho

b) El peso de la esfera de corcho

c) El empuje sobre la esfera, si se introduce a 5m de profundidad

d) La aceleración de la esfera cuando se suelta

e) Con qué velocidad llega la esfera a la superficie libre del agua

f) Hasta qué altura en el aire sube la esfera, respecto a la superficie libre del agua.

27.- Desde 10m de altura sobre un tanque de gasolina se deja caer un cuerpo de $0{,}4 g/cm^3$ de densidad y $400 cm^3$ de volumen. Calcular:
a) Con qué rapidez llega a la superficie libre de la gasolina
b) La fuerza de frenado producida por el liquido
c) La aceleración producida
d) El tiempo que tarda en alcanzar la profundidad máxima.

28.- En un globo que tiene un volumen de 25000 litros de hidrógeno el peso de la envoltura y accesorios es de 60kg. Calcular:
a) El peso total del globo
b) El empuje
c) La fuerza ascensional del globo

29.- En un globo de $75 m^3$ de volumen, el peso de la envoltura y accesorios es de 48 kg. Si la fuerza ascensional que actúa sobre el globo es 100 (N), calcular:
a) El empuje que actúa sobre el globo
b) El peso total del globo
c) El peso del gas
d) La densidad del gas

30.- Un pedazo de corcho de 1000g está sumergido en agua dulce a 4m de profundidad. Calcular:
a) El empuje que actúa sobre el pedazo de corcho
b) La fuerza ascensional
c) La aceleración producida
d) En qué tiempo sale del agua
e) Con qué rapidez sale del agua.

6.8 EVALUACION OBJETIVA

Completar

1.- Al ser sumamente grandes las distancias intermoleculares en los gases, estos son fácilmente..

2.- Los fluidos........................forma propia, adoptan la.................. ....que los contiene

3.- Para dos cuerpos de igual volumen, será mayor la densidad de aquel que su .... sea mayor

4.- Sobre una superficie (A) se puede aplicar una fuerza (F) si la presión causada tiene un valor máximo, entonces la fuerza forma un ángulo de ....con la superficie.

5.- La densidad de un fragmento pequeño de cobre es ....densidad de un fragmento grande, del mismo material.

6.- El valor de la presión en un punto, en el interior de un líquido, depende de ....del líquido y de la ....a la que se encuentre el punto.

7.- En un líquido, todos los puntos que están a igual profundidad, están sometidos a igual..

8.- La presión atmosférica en la cima de una montaña es......................... ....que en un sitio a nivel del mar ya que la "columna" de aire sobre aquel punto será ....

9.- En cada punto de un líquido en equilibrio la presión es ....en todas las direcciones.

10.- Un incremento en la presión en el punto de un fluido en equilibrio se transmite sin alteración...

11.- La prensa hidráulica es una aplicación del ....

12.- En una prensa hidráulica, la fuerza sobre cada centímetro cuadrado del pistón menor es...a la fuerza sobre cada centímetro cuadrado del pistón mayor.

13.- En un tubo U abierto de sección uniforme se vierte dos líquidos no miscibles, la altitud de las columnas de los líquidos, en relación al nivel común de contacto es..proporcional al valor de sus densidades.

14.- El empuje que ejerce un líquido sobre un cuerpo parcial o totalmente sumergido en él, depende de..del líquido y del..del cuerpo, su valor es igual al peso...................................

15.- Dos cuerpos de igual volumen se sumergen totalmente en un mismo líquido. Si la densidad de los cuerpos es diferente, el valor del empuje sobre el de mayor densidad será..el ejercido sobre el de menor densidad

16.- Un cuerpo flota cuando es colocado en dos líquidos diferentes (primero en el uno y luego en el otro) , entonces el empuje recibido por el cuerpo en el líquido de mayor densidad es...al recibido en el de menor densidad.

17.- En relación a la pregunta anterior. El volumen sumergido del cuerpo es ....en el líquido de mayor densidad que en el de menor densidad.

18.- Un sólido macizo inmerso totalmente en agua recibe un empuje ....al que recibirá si estuviese inmenso en alcohol.

19.- Un cuerpo macizo de hierro se sumerge en agua mientras mayor sea la profundidad a la que se encuentre ....será la presión que soporte y el empuje será...

20.- En un recipiente hay agua con hielo. Si el hielo se "derrite" el nivel de la superficie libre del agua..con respecto al inicial.

Escribir (V) verdadero, o (F) falso.

1.- Las fuerzas de cohesión intermoleculares en los sólidos son mayores que en los gases..( )

2.- Si dos cuerpos de diferente densidad tienen igual masa, el volumen mayor tendrá el de menor densidad..( )

3.- En un líquido en equilibrio, la presión en un punto es mayor hacia abajo que en cualquiera otra dirección...( )

4.- La presión en el fondo de un recipiente completamente lleno, depende únicamente de la densidad de liquido contenido...( )

5.- La diferencia de presión entre dos puntos cualesquiera dentro de un líquido únicamente depende de la distancia vertical entre dichos puntos ....( )

6.- La densidad de un fragmento de hierro es menor en la estratósfera que en el fondo de una mina,..( )

7.- La presión absoluta es igual a la suma de la presión atmosférica local y la presión manométrica ....( )

8.- Si un auto viaja de la sierra a la costa, la presión manométrica de sus neumáticos aumenta...( )

9.- Mientras se asciende una montaña, la presión atmosférica disminuye........( )

10.- El principio de Pascal afirma que en un líquido en equilibrio, la presión es la misma en todos los puntos ....( )

11.- En una prensa hidráulica la presión en el pistón menor es menor que la presión en el pistón mayor...( )

12.- En un recipiente abierto y lleno de agua, la presión atmosférica únicamente actúa sobre la superficie libre del líquido..................................... ( )

13.- Un mismo cuerpo es totalmente sumergido en dos líquidos diferentes, el empuje que recibe el cuerpo, es mayor en el líquido de mayor densidad..( )

14.- Dos cuerpos de igual volumen pero de densidad diferente se sumergen en un mismo líquido, el empuje del líquido sobre los cuerpos es mayor en el de mayor densidad..( )

15.- Una esfera maciza de acero se sumerge en una piscina. El empuje del agua sobre la esfera cuando ésta se encuentra a dos metros de profundidad, es el doble del que se ejercía a un metro de profundidad...................................( )

16.- Una persona que flota en una piscina, el momento que exhala tiende a sumergirse...( )

17.- Un bloque de madera flota primeramente en agua (ρ=1g/cm^3) y luego en alcohol (ρ=0.8g/cm^3). La relación entre el volumen sumergido en el alcohol al sumergido en agua tiene un valor de 1,25..( )

18.- Un cubo de hielo flota en un vaso con agua. La relación entre el volumen del hielo que emerge del nivel libre del agua y sumergido es de (1/9)...( )

19.- Un cubo de hielo flota en un vaso con agua. El nivel libre del agua desciende cuando el hielo se funde totalmente ("derrite")..( )

20.- Como la densidad del aluminio es mayor que la del agua, todo cuerpo de aluminio debe sumergirse en ésta... ( )

Subrayar la respuesta correcta.

1.- La fuerza de cohesión intermolecular en los gases es:
a) de igual valor que en los líquidos
b) mayor que en los líquidos
c) prácticamente despreciable en su valor
d) N.R.A

2.- Si se tiene dos esferas homogéneas y macizas de acero de diferente diámetro, se cumple que:
a) las masas son iguales
b) las densidades son iguales
c) los volúmenes son los mismos
c) N.R.A

3.- Un cuchillo mientras mas afilado sea, corta con mayor facilidad, porque:
a) es mayor la fuerza que se aplica con él
b) es mayor la presión que se ejerce con él
c) la fuerza de fricción aumenta
d) N.R.A

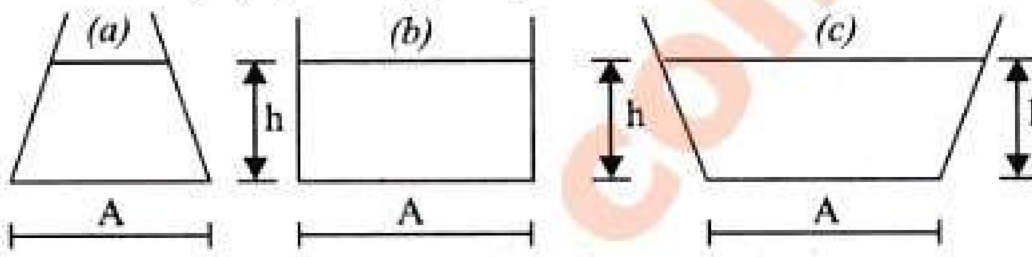
4.- La presión en un punto interior de un líquido en equilibrio:
a) depende únicamente de su profundidad respecto al nivel del líquido
b) depende únicamente de la densidad del líquido
c) depende de la densidad del líquido y de su profundidad
d) N.R.A

5.- La presión en un punto interior de un líquido en equilibrio:
a) es igual en todas las direcciones
b) es mayor hacia abajo que hacia arriba
c) es mayor hacia la izquierda de hacia la derecha
d) N.R.A.

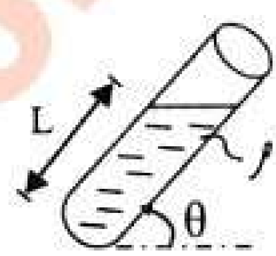
6.- La presión en el interior de un líquido
a) aumenta con la anchura del recipiente
b) no depende de la densidad del líquido
c) es constante
d) aumenta con la profundidad.

7.- Si se coloca una misma cantidad de agua en recipientes cilíndricos de diámetros diferentes, la presión en el fondo:
a) es igual en todos los recipientes
b) es mayor en el de mayor diámetro
c) es mayor en el de menor diámetro
d) N.R.A

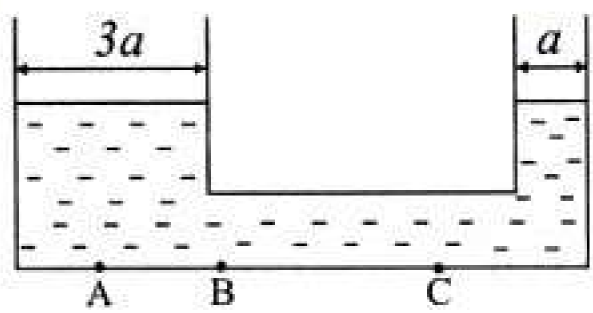
8.- Los recipientes de la figura tienen igual área en su base y se llena con agua hasta una misma altura. La fuerza (F) que el agua ejerce sobre la base es:
a) $F_c > F_b > F_a$
b) $F_a > F_b > F_c$
c) $F_c = F_b = F_a$
d) N.R.A



9.- La presión hidrostática en el fondo del tubo de la figura es:
a) $P_H = \rho . L . g$
b) $P_H = \rho . L . g . \cos\theta$
c) $P_H = \rho . L . g . \text{sen } \theta$
d) N.R.A

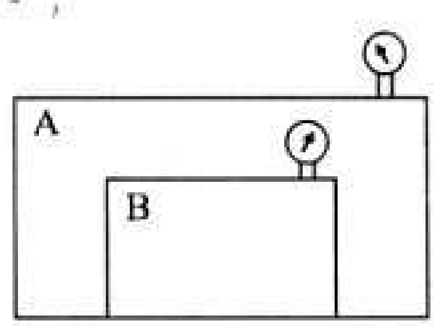


10.- El tubo U de la figura contiene agua. Los valores de la presión en los puntos A, B, y C cumplen que:
a) $P_A > P_C > P_B$
b) $P_A > P_B > P_C$
c) $P_A = P_B = P_C$
d) N.R.A



11.- La presión atmosférica a nivel del mar (1 atmósfera) es equivalente a la presión que ejercería una columna de alcohol (800 kg/m^3) que mida:
a) 10,34m
b) 12,92m
c) 0,76m
d) N.R.A

12.- El sistema de la figura se encuentra en Quito (Po =540mm de Hg) si el manómetro A marca 2 atm y el B 1 atm, la presión absoluta en el interior del recipiente (B) es:
a) 3.71atm
b) 3.00atm
c) 2.29atm
d) N.R.A

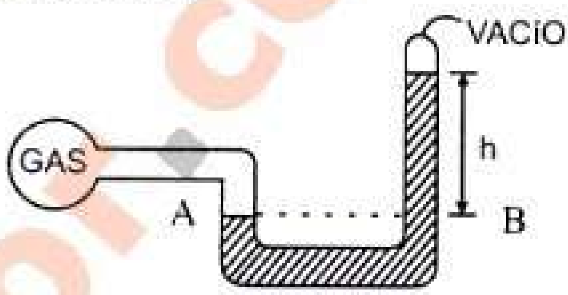


13.- La profundidad a la que la presión absoluta de un punto en el mar es el triple de la que hay en su superficie es:

a) 30,10m
b) 20,07m
c) 10,03m
d) N.R.A.

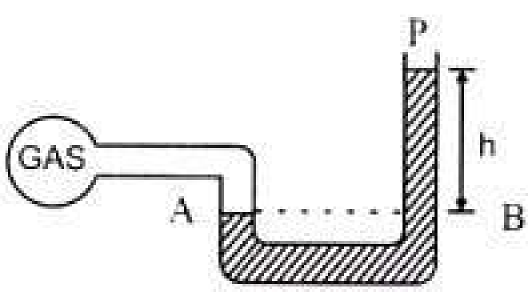
14.- El gas que contiene un recipiente está unido a un tubo en U que contiene un líquido de densidad ρ, como se muestra en la figura. Cuál es la presión absoluta del gas, si la presión atmosférica exterior es P:

a) $P+\rho gh$
b) ρgh
c) $P-\rho gh$
d) 0



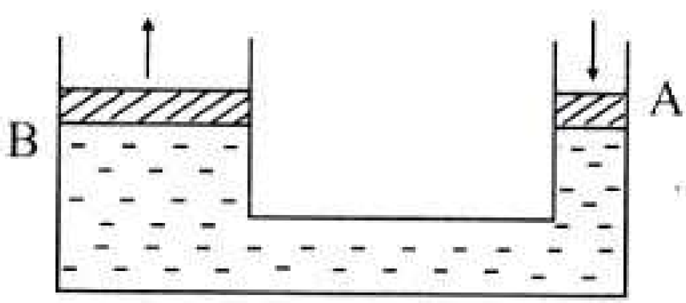
15.- El gas de un recipiente esta unido a un tubo en U abierto, que contiene un líquido de densidad ρ, como se muestra en la figura. Cuál es la presión absoluta del gas, si la presión atmosférica exterior es P:

a) $P+\rho gh$
b) ρgh
c) $P-\rho gh$
d) 0



16.- En la figura, el pistón (A) tiene un diámetro de 5cm y el pistón (B) un diámetro de 10cm. La fuerza que debe aplicarse al pistón (A) para sostener un peso de 200N en el pistón B es:

a) 100N
b) 50N
c) 25N
d) N.R.A



17.- Un cuerpo flota en el agua con la mitad de su volumen sumergido.

17.1 El empuje que ejerce el agua sobre el cuerpo es:

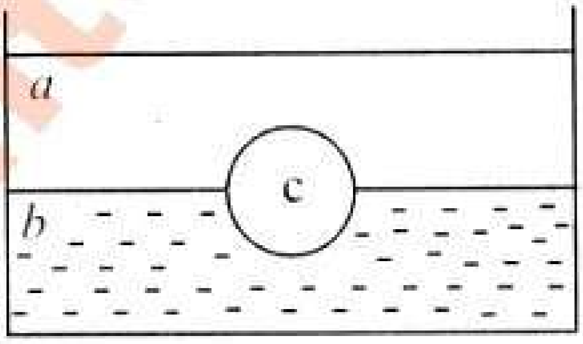
a) La mitad del peso del cuerpo
b) Igual al peso del cuerpo
c) El doble del peso del cuerpo
d) N.R.A

17.2 La densidad relativa del cuerpo es:
a) 1
b) 0.5
c) 2
d) N.R.A

18.- Una esfera maciza de acero se sumerge en una piscina
a) El empuje cuando está a 2m de profundidad es el doble de cuando esta en 1m
b) El empuje es constante, no depende de la profundidad
c) El empuje disminuye con la profundidad
d) N.R.A

19.- Una esfera de densidad ρ_c, flota entre dos líquidos no miscibles de densidades ρ_a y ρ_b respectivamente. El plano de separación de los líquidos pasa por la mitad de la esfera. La densidad de la esfera es:

a) $\rho_C = \rho_a + \rho_b$
b) $\rho_C = 2(\rho_a + \rho_b)$
c) $1/\rho_c = 1/\rho_a + 1/\rho_b$
d) $\rho_C = ½(\rho_a + \rho_b)$



20.- De un resorte fijo de longitud 10 cm y constante elástica k, se suspende un cuerpo de masa m y volumen V. Cuando el sistema está en el aire el resorte tiene una longitud de 12 cm y cuando el cuerpo está sumergido totalmente en agua la longitud del resorte es 11.5cm. La densidad relativa del sólido es:
a) 2.0
b) 4.0
c) 1.5
d) N.R.A.

7. HIDRODINAMICA

7.1 CONCEPTOS GENERALES

El objetivo de la hidrodinámica es estudiar a los fluidos en movimiento; por ejemplo las corrientes de agua, el transporte de ésta por tuberías o túneles, el movimiento del viento.

El estudio de la dinámica de fluidos reales es complejo, necesitándose frecuentemente recurrir inclusive a la construcción de modelos y simulaciones, lo cual obviamente escapa del alcance de ésta obra.

Como primera aproximación al estudio de los fluidos se considerará que éstos son *ideales* y tienen como característica ser: estables, irrotacionales, incompresibles y no viscosos.

El movimiento de un fluido se considera como estable o estacionario cuando cada partícula que pasa por determinada posición siempre tiene la misma velocidad de las precedentes es esa posición. Es claro que en otras posiciones, la misma partícula puede tener otras velocidades.

La *irrotacionalidad* se refiere a que la partícula en su movimiento únicamente tiene traslación es decir no gira ni rota.

La *incompresibilidad* se refiere a que los fluidos en su movimiento mantienen constante el valor de su densidad.

Y la no *viscosidad* hace referencia a que en el movimiento del fluido no hay rozamiento entre las diferentes capas del fluido, ni rozamiento del fluido con las paredes de las tuberías que lo conducen.

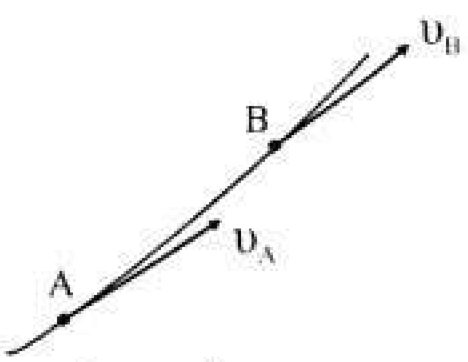
7.2 ECUACIÓN DE CONTINUIDAD

Se denomina línea de flujo a la trayectoria seguida por un elemento del fluido de masa Δm

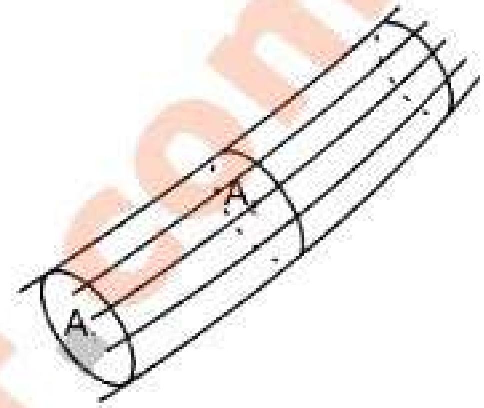
La línea de corriente se define como la curva cuya tangente en cualquier punto coincide con la dirección de la velocidad del fluido en ese punto.

En el régimen estacionario la línea de corriente es la línea de flujo.

Se denomina tubo de fluido o de corriente a la porción del espacio que está limitada por líneas de corriente apoyadas sobre un área A.

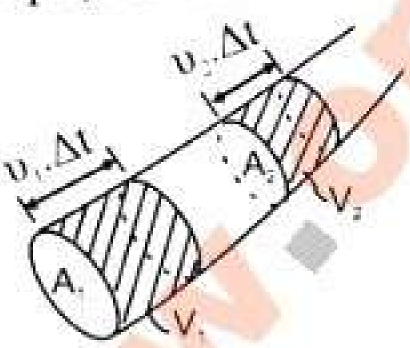


Línea de corriente



Tubo de corriente

En un movimiento de régimen estacionario, el fluido no puede atravesar las paredes del tubo de corriente, es decir, éste se comporta como si fuese una tubería sólida de la misma forma. No se produce la mezcla o intercepción de las líneas de corriente, por lo que la cantidad de fluido que atraviesa la sección (A_1) del tubo en un cierto intervalo de tiempo, debe ser la misma que atraviesa por (A_2) en el mismo intervalo:



La masa de fluido que pasa a través de A_1 es:

$\Delta m_1 = \rho . V_1$, pero $V_1 = A_1(\upsilon_1 . \Delta t)$, de donde:
$\Delta m_1 = \rho . A_1(\upsilon_1 . \Delta t)$,

Y la masa de fluido que sale por A_2 es:

$\Delta m_2 = \rho . V_2$, pero $V_2 = A_2(\upsilon_2 . \Delta t)$, de donde:
$\Delta m_2 = \rho . A_2(\upsilon_2 . \Delta t)$, como $\Delta m_1 = \Delta m_2$, se tiene:
$\rho . A_1 . \upsilon_1 . \Delta t = \rho . A_2 . \upsilon_2 . \Delta t$, es decir:
$$A_1 . \upsilon_1 = A_2 . \upsilon_2 \qquad \textbf{(7.2.1)}$$

La ecuación anterior se denomina ecuación de continuidad, y representa la conservación de la masa total del fluido. Permite además concluir que si la sección de un tubo de corriente se disminuye, la velocidad del fluido aumenta.

Gasto o Caudal (Q): es el volumen de líquido trasportado en la unidad de tiempo.

$$Q = V / \Delta t$$

$$Q = \frac{A.\Delta x}{\Delta t}$$

$$Q = A.\upsilon \qquad \textbf{(7.2.2)}$$

Unidades: el caudal es un magnitud escalar, cuyas unidades son las de un volumen divididas por las de tiempo:

En el SI: $\frac{V}{\Delta t} = Q$

$$\left[\frac{m^3}{s}\right] = Q$$

En el CGS: $\frac{V}{\Delta t} = Q$

$$\left[\frac{cm^3}{s}\right] = Q$$

Equivalencia: $1\frac{dm^3}{s} = 1\frac{litro}{s}$

Dimensiones: $Q = \frac{V}{\Delta t}$

$$[Q] = \frac{[L^3]}{[T]}$$

$$[Q] = [L^3T^{-1}]$$

Ejemplos:

1.- Para llenar con agua un recipiente de 100 litros de capacidad se utiliza una manguera de 1.5cm de radio. Si tarda 4 minutos en llenar el recipiente, calcular:
a) El gasto en litros por segundo
b) Con que rapidez sale el agua de la manguera

a) $Q = \dfrac{V}{\Delta t}$

$$Q = \frac{100 \text{ litros}}{4 \text{ min}} = \frac{100 \text{ litros}}{240 \text{ s}}$$

$$Q = 0{,}42 \text{ l/s}$$

b) $Q = A \cdot \upsilon$

$$\upsilon = \frac{Q}{A}$$

$$\upsilon = \frac{0{,}42 \text{ l/s}}{\pi R^2} = \frac{0{,}42 \text{ dm}^3/\text{s}}{\pi (1{,}5 \text{ cm})^2} = \frac{420 \text{ cm}^3/\text{s}}{7{,}07 \text{ cm}^2}$$

$$\upsilon = 59.41 \text{ cm/s}$$

2.- En una tubería por donde circula gasolina, su diámetro cambia de 3cm a 1cm. Si el caudal es constante e igual a 5 l/min, calcular:
a) La rapidez del fluido en la parte ancha
b) La rapidez del fluido en el estrechamiento.

a) $A_1 = \pi \dfrac{D_1^2}{4} = \pi \dfrac{(3\text{cm})^2}{4} = 7{,}07 \text{ cm}^2$

$$Q = 5 \text{ l/min.} = 5 \text{ dm}^3/\text{min} = \frac{5000 \text{ cm}^3}{60 \text{ s}} = 83{,}33 \text{ cm}^3/\text{s}$$

$$Q = A_1 . \upsilon_1$$

$$\upsilon_1 = \frac{Q}{A_1} = \frac{83{,}33 \text{ cm}^3/\text{s}}{7{,}07 \text{ cm}^2}$$

$$\upsilon_1 = 11{,}79 \text{ cm/s}$$

b) $A_2 = \pi \dfrac{D_2^2}{4} = \pi \dfrac{(1cm)^2}{4} = 0{,}79\ cm^2$

$Q = A_2 . \upsilon_2$

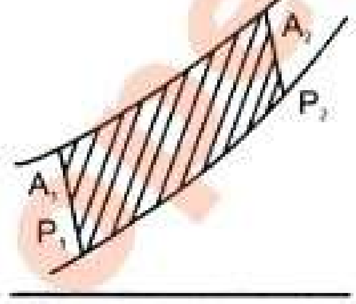
$\upsilon_2 = \dfrac{Q}{A_2} = \dfrac{83{,}33\ cm^3/s}{0{,}79\ cm^2}$

$\upsilon_2 = 105{,}48\ cm/s$

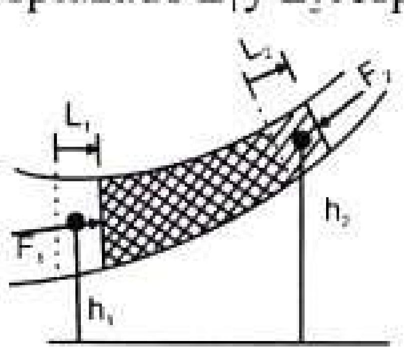
7.3 ECUACIÓN DE BERNOULLI

La ecuación de Bernoulli constituye una de las leyes más importantes en el estudio de la dinámica de los fluidos, se basa esencialmente en la conservación de la energía mecánica.

Consideremos un tubo de corriente estrecho como el de la figura, por el que circula un fluido ideal en régimen estacionario:



Se toma para el análisis una porción del fluido limitado por las secciones A_1 y A_2. el trabajo realizado por el resto del fluido sobre la porción de control, cuando las secciones A_1 y A_2, se han desplazado L_1 y L_2 respectivamente es:



Sobre A_1 la fuerza debida a la presión P_1 es ($P_1 A_1$) y efectúa un trabajo:
$W_1 = (P_1 A_1).L_1$
Sobre A_2, la fuerza debida a la presión P_2 es ($P_2 A_2$) y efectúa un trabajo:

$W_2 = -(P_2 \,.\, A_2).L_2$, es negativo porque la fuerza tiene dirección opuesta a la del desplazamiento.

El trabajo neto de las fuerzas de presión, realizado sobre la porción de flujo es:
$W = W_1 + W_2$
$W = P_1 \,.\, A_1 \,.\, L_1 - P_2 \,.\, A_2 \,.\, L_2$
$W = P_1 \,.\, V_1 - P_2 \,.\, V_2$, como $V_1 = V_2 = V$
$W = (P_1 - P_2) \,.\, V$, como $V = m/\rho$

$W = (P_1 - P_2)\dfrac{m}{\rho}$, donde m es la masa de un elemento de fluido y ρ su densidad

El resultado de este trabajo es como si el elemento del fluido ($A_1.L_1$) que se mueve con velocidad υ_1 y está a una altura h_1 se trasladaría a una altura h_2 con una velocidad υ_2 elemento ($A_2.L_2$).

La parte restante de la porción del fluido en análisis, (doblemente sombreada) no experimenta cambio alguno.

El trabajo anteriormente calculado es igual a la suma de las variaciones de las energías potencial y cinética del elemento es decir.

$W = \Delta Ep + \Delta Ec$

$$(P_1 - P_2).\ \frac{m}{\rho} = (m \,.\, g \,.\, h_2 - m \,.\, g \,.\, h_1) + (\tfrac{1}{2}m \,.\, \upsilon_2^2 - \tfrac{1}{2}m \,.\, \upsilon_1^2)$$

Si se divide esta expresión para (m) y se agrupan los términos en las posiciones (1) y (2) se tiene:

$$P_1 - P_2 = \rho \,.\, g \,.\, h_2 - \rho \,.\, g \,.\, h_1 + \tfrac{1}{2}\rho \,.\, \upsilon_2^2 - \tfrac{1}{2}\rho \,.\, \upsilon_1^2$$
$$P_1 + \rho \,.\, g \,.\, h_1 + \tfrac{1}{2}\rho \,.\, \upsilon_1^2 = P_2 + \rho \,.\, g \,.\, h_2 + \tfrac{1}{2}\rho \,.\, \upsilon_2^2 \qquad \textbf{(7.3.1)}$$

Expresión conocida como la Ecuación de Bernoulli, que fue deducida en 1783 por Daniel Bernoulli.

Como las secciones A_1 y A_2 se eligieron arbitrariamente, de madera general se puede escribir.

$$P + \rho \,.\, g \,.\, h + \tfrac{1}{2}\rho \,.\, \upsilon^2 = CONSTANTE \qquad \textbf{(7.3.2)}$$

En la expresión anterior a la magnitud (P) se denomina presión estática, a la magnitud (ρgh) presión hidráulica ó altimétrica y a la magnitud ($\frac{1}{2}\ \rho \cdot \upsilon_2^2$) presión dinámica.

De las ecuaciones de continuidad y de Bernoulli se deduce que en los lugares de estrechamiento de un conducto, aumenta la velocidad del fluido y disminuye la presión estática.

Ejemplos:

1.- Un líquido de densidad 0.96g/cm^3 fluye por una tubería horizontal de 10cm de diámetro, con una rapidez de 3.1m/s. En un punto donde la tubería se estrecha y presenta un diámetro de 7cm, la presión vale 0.25kg/cm^2. Calcular:
a) La rapidez del fluido en el estrechamiento
b) La presión del fluido en la parte ancha del tubo.

$A_1 = \pi R_1^2 = \pi(5cm)^2 = 78,54\ cm^2$
$A_2 = \pi R_2^2 = \pi(3,5cm)^2 = 38,48\ cm^2$
$P_2 = 0,25\ kg/cm^2 = 2,45 \times 10^4\ Pa$
$\upsilon_1 = 3,1\ m/s$

a) $A_r \cdot \upsilon_1 = A_2 \cdot \upsilon_2$

$$\upsilon_2 = \frac{A_r \cdot \upsilon_1}{A_2} = \frac{78,54\ cm^2 .\ 3,1\ m/s}{38,48\ cm^2}$$

$\upsilon_2 = 6,33\ m/s$

b) $P_1 + \rho gh_1 + \frac{1}{2}\rho\,\upsilon_1^2 = P_2 + \rho\, gh_2 + \frac{1}{2}\rho\,\upsilon_2^2$, como $h_1 = h_2$

$P_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\,(\upsilon_2^2 - \upsilon_1^2)$
$P_1 = 2,45 \times 10^4\ Pa + \frac{1}{2}.960\ kg/m^3 \left[(6,33\ m/s)^2 - (3,1\ m/s)^2\right]$
$P_1 = 2,45 \times 10^4\ Pa + 1,46 \times 10^4\ Pa$
$P_1 = 3,91 \times 10^4\ Pa$

2.- Fluye agua a través de un tubo que tiene una contracción. En un punto donde la presión es de $3.2 x 10^4$ Pa el radio es de 4cm, en otro punto que está 0.75m más alto, la presión es de $1.4 x 10^4$ Pa y el radio es 2cm. Determinar:
a) Qué rapidez tiene el agua al pasar por la sección superior
b) Qué rapidez tiene el agua al pasar por la sección inferior
c) El caudal en l/s

$A_1 = \pi R_1^2 = \pi(4cm)^2 = 50,27\ cm^2$ $\qquad h_1 = 0$
$A_2 = \pi R_2^2 = \pi(2cm)^2 = 12,57\ cm^2$ $\qquad h_2 = 0,75\ m$
$P_1 = 3,2 \times 10^4\ Pa$
$P_2 = 1,4 \times 10^4\ Pa$

a) Aplicando la ecuación de la continuidad, tenemos:

$$A_1 . \upsilon_1 = A_2 . \upsilon_2$$

$$\upsilon_1 = \frac{A_2 . \upsilon_2}{A_1} \qquad \textbf{(1)}$$

Utilizando la ecuación de Bernoulli, tenemos:

$P_1 + \rho g \cancel{h_1}^{0} + \frac{1}{2} \rho \upsilon_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2} \rho \upsilon_2^2$ **(2)** , como $h_1 = 0$

Reemplazando (1) en (2):

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho \frac{A_2^2 . \upsilon_2^2}{A_1^2} = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2$$

$$P_1 - P_2 - \rho g h_2 = \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2 \left(1 - (A_2/A_1)^2\right)$$

$$\upsilon_2^2 = \frac{2(P_1 - P_2 - \rho g h_2)}{\rho(1 - (A_2/A_1)^2)}$$

$$\upsilon_2^2 = \frac{2(3,2 \times 10^4\ Pa - 1,4 \times 10^4\ Pa - 1000\ kg/m^3 . 9,8\ m/s^2 . 0,75m)}{1000\ kg/m^3 \left[1 - \frac{(12,57\ cm^2)^2}{(50,27cm^2)^2}\right]}$$

$$\upsilon_2^2 = \frac{2,13 \times 10^4\ Pa}{937,48\ kg/m^3}$$

$$\upsilon_2 = 4,77\ m/s$$

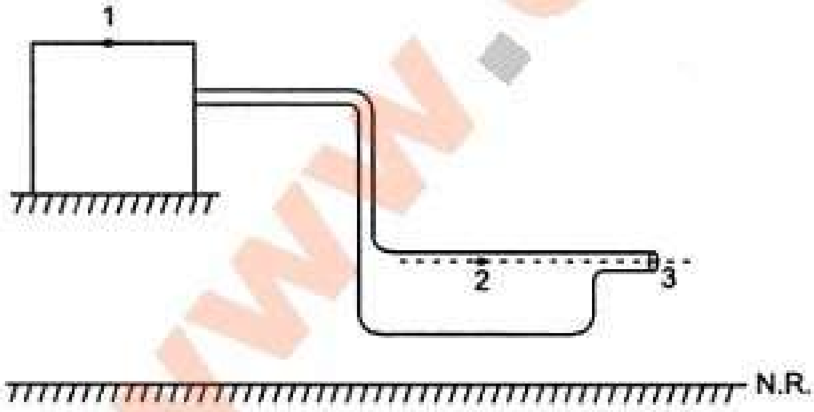
b) En la ecuación (1):

$$\upsilon_1 = \frac{A_2 \cdot \upsilon_2}{A_1} = \frac{12{,}57\ cm^2 \cdot 4{,}77\ m/s}{50{,}27\ cm^2}$$

$\upsilon_1 = 1{,}19\ m/s$

c) $Q = A_1 \cdot \upsilon_1$
$Q = 50{,}27\ cm^2 \cdot 1{,}19\ m/s$
$Q = 50{,}27\ cm^2 \cdot 119\ cm/s$
$Q = 5982{,}13\ cm^3/s$
$Q = 5{,}98\ l/s$

3.- El agua sale continuamente por el tubo de la figura. La altura del punto 1 con respecto a una línea de referencia es 14m y la de los puntos 2 y 3 de 1.8m. la sección del depósito es muy grande comparada con las anteriores. El barómetro exterior marca 540mm de mercurio (Quito). Calcular.
a) La rapidez del fluido en los puntos 1,2 y 3
b) El caudal en litros por segundo
c) La presión estática en los puntos 1,2 y3
d) La presión altimétrica en los puntos 1,2 y 3
e) La presión dinámica en los puntos 1,2 y 3
f) La presión total en los puntos 1,2 y 3



$h_1 = 14\ m$
$h_2 = h_3 = 1{,}8\ m$
$A_2 = 45\ cm^2$
$A_3 = 15\ cm^2$

a) $\upsilon_1 = 0$, porque la sección del depósito es muy grande comparada con las otras áreas y el nivel desciende muy lentamente.
Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 1 y 3, tenemos:

$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2} \rho \upsilon_1^2 = P_3 + \rho g h_3 + \frac{1}{2} \rho\ \upsilon_3^2$
donde: $P_1 = P_3 = P_o$ y $\upsilon_1 = 0$

$\upsilon_3^2 = 2g(h_1 - h_3)$
$\upsilon_3^2 = 2 \cdot 9{,}8\ m/s^2\ (14m - 1{,}8m)$
$\upsilon_3 = 15{,}463\ m/s$

Aplicando la ecuación de continuidad a los puntos 2 y 3, tenemos:

$A_2 \cdot \upsilon_2 = A_3 \cdot \upsilon_3$

$$\upsilon_2 = \frac{A_3 \cdot \upsilon_3}{A_2} = \frac{15\ cm^2 \cdot 15{,}4635\ m/s}{45\ cm^2}$$

$\upsilon_2 = 5{,}1545\ m/s$

b) $Q = A_3 \cdot \upsilon_3$
$Q = 15\ cm^2 \cdot 15{,}4635\ m/s$
$Q = 15\ cm^2 \cdot 1546{,}35\ cm/s$
$Q = 23195{,}25\ cm^3/s$
$Q = 23{,}195\ dm^3/s$
$Q = 23{,}195\ l/s$

c) $P_1 = P_3 = P_o$
$P_1 = P_3 = \rho gh$
$P_1 = P_3 = 13600\ kg/m^3 \cdot 9.8\ m/s^2 \cdot 0.54m$
$P_1 = P_3 = 71971.2\ Pa$

Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos 2 y 3, tenemos:

$P_2 + \rho gh_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 = P_3 + \rho gh_3 + \frac{1}{2}\rho\ \upsilon_3^2$ donde $h_2 = h_3$
$P_2 = P_3 + \frac{1}{2}\rho\ \upsilon_3^2 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$
$P_2 = 71971{,}2\ Pa + \frac{1}{2}(1000\ kg/m^3)((15{,}4635\ m/s)^2 - (5{,}1545\ m/s)^2)$
$P_2 = 71971{,}2\ Pa + 106275{,}6\ Pa$
$P_2 = 178246{,}8\ Pa$

d) $\rho gh_1 = 1000\ kg/m^3 \cdot 9{,}8\ m/s^2 \cdot 14m = 137200\ Pa$
$\rho gh_2 = 1000\ kg/m^3 \cdot 9{,}8\ m/s^2 \cdot 1.8\ m = 17640\ Pa$
$\rho gh_3 = 1000\ kg/m^3 \cdot 9{,}8\ m/s^2 \cdot 1.8\ m = 17640\ Pa$

e) $\frac{1}{2}\rho\ \upsilon_1^2 = 0$, porque $\upsilon_1 = 0$
$\frac{1}{2}\rho\ \upsilon_2^2 = \frac{1}{2}(1000kg/m^3)(5{,}1545m/s)^2 = 13284{,}4\ Pa$
$\frac{1}{2}\rho\ \upsilon_3^2 = \frac{1}{2}(1000kg/m^3)(15{,}4635m/s)^2 = 119560\ Pa$

f) $P_{T1} = P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2$

$P_{T1} = 71971{,}2\ Pa + 137200\ Pa + 0$

$P_{T1} = 209171{,}2\ Pa$

$P_{T2} = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_2^2$

$P_{T2} = 178246{,}8\ Pa + 17640\ Pa + 13284{,}4\ Pa$

$P_{T2} = 209171{,}2\ Pa$

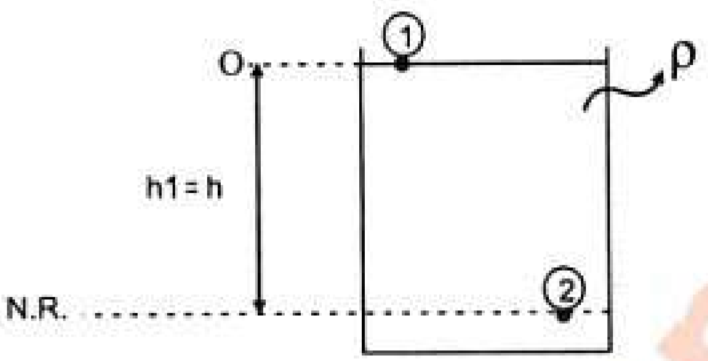
$P_{T3} = P_3 + \rho g h_3 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_3^2$

$P_{T3} = 71971{,}2\ Pa + 17640\ Pa + 119560\ Pa$

$P_{T3} = 209171{,}2\ Pa$

7.4 APLICACIONES DE LA ECUACIÓN DE BERNOULLI

7.4.1 *Cálculo de la presión en el interior de un líquido en reposo:*



Como el fluido está en reposo:

$\upsilon_1 = \upsilon_2 = 0$

$P_1 = P_0 =$ presión atmosférica

$h_2 = 0$

$h_1 = h$

Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos (1) y (2)

$P_1 + \rho g h_1 + \frac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \frac{1}{2}\rho\ \upsilon_2^2$

$P_2 = Po + \rho g h$ **(7.4.1)**

De esto se concluye que lo tratado en hidrostática constituyen casos especiales de la ecuación de Bernoulli.

Ejemplo:

Un buzo se encuentra a 20m de profundidad bajo el mar. Si la densidad del agua de mar es 1,03 g/cm^3, calcular la presión total que soporta el buzo a esa profundidad.

$P = Po + \rho g h$

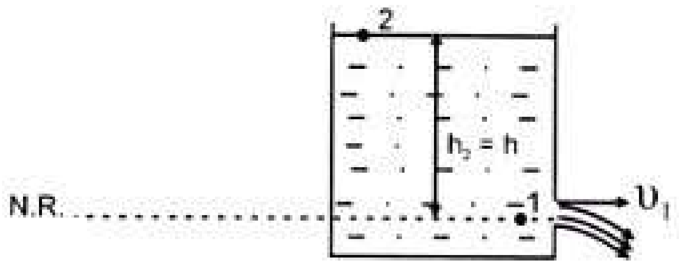
$P = 1{,}013 \times 10^5\ Pa + 1030\ kg/m^3 \cdot 9{,}8\ m/s^2 \cdot 20m$

$P = 1{,}013 \times 10^5\ Pa + 2.018 \times 10^5\ Pa$

$P = 3{,}03 \times 10^5\ Pa$

7.4.2 Teorema de Torricelli

Permite determinar la velocidad con que sale un líquido por un orificio lateral de un recipiente a una profundidad h con respecto a la superficie libre del líquido.



$P_1 = Po$
$h_1 = 0$
$P_2 = Po$
$h_2 = h$
$\upsilon_2 = 0$

Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos (1) y (2):

$$P_1 + \rho g h_1 + \tfrac{1}{2}\rho \upsilon_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \tfrac{1}{2}\rho \upsilon_2^2$$

$$\upsilon_1 = \sqrt{2gh} \qquad \textbf{(7.4.2)}$$

La ecuación anterior se conoce como la fórmula de Torricelli y expresa que la velocidad de salida del líquido por un orificio de un recipiente es igual a la que adquiere un cuerpo al caer desde una altura igual a la profundidad del orificio con respecto a la superficie libre del líquido. Esta velocidad no depende de la dirección respecto a la horizontal, es la misma para cualquier dirección de salida del chorro.

Ejemplos.

1.- Un orificio situado en el fondo de un recipiente dista 3.8m de la superficie libre del líquido. Calcular:
a) Con que rapidez sale el líquido por el orificio
b) Qué rapidez tiene una partícula del fluido a los 2 segundos de abierto el orificio.
c) Qué altura habrá descendido en el aire una partícula del mismo fluido en 2 segundos.

a) $\upsilon_0 = \sqrt{2gh}$
$\upsilon_0 = \sqrt{2.9{,}8\,m/s^2 \,.\, 3{,}8m}$
$\upsilon_0 = 8{,}63\ m/s$

b) $\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon o} + \vec{g}\,.\,\Delta t$
$\vec{\upsilon} = 8{,}63\,\vec{i}\,m/s - 9{,}8\,\vec{j}\,m/s^2 \,.\, 2s$
$\vec{\upsilon} = 8{,}63\,\vec{i}\,m/s - 19{,}6\,\vec{j}\,m/s$
$\upsilon = 21.42\ m/s$

c) $h = \cancel{\upsilon_{0y}}^{0} \,.\, \Delta t + \tfrac{1}{2} g \,.\, \Delta t^2$
$h = \tfrac{1}{2}.9{,}8\ m/s^2.4s^2$
$h = 19{,}6\ m$

2.- En la pared de un depósito lleno de líquido hasta una altura de 9 m, se abre un orificio circular de 1cm de radio en el punto medio de la altura del líquido.
Si el nivel del depósito permanece constante, calcular:
a) La rapidez de salida del orificio
b) El gasto en litros por segundo
c) El tiempo que demora el líquido en caer desde el orificio hasta el suelo
d) El alcance del chorro líquido
e) Con qué velocidad el chorro toca el suelo

a) $\upsilon o = \sqrt{2gh}$
$\upsilon o = \sqrt{2 . 9{,}8 m/s^2 . 4{,}5 m}$
$\upsilon o = 9{,}39\ m/s$

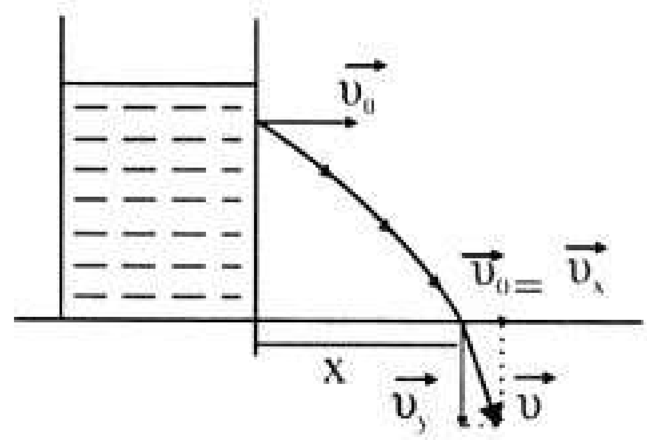
b) $A = \pi R^2$
$A = \pi (0{,}01\ m)^2$
$A = 3{,}14 \times 10^{-4} m^2.$

$Q = A . \upsilon$
$Q = 3{,}14 \times 10^{-4} m^2 . 9{,}39\ m/s$
$Q = 2{,}95 \times 10^{-3} m^3/s$
$Q = 2{,}95\ dm^3/s$
$Q = 2{,}95\ l/s$

c) $h = \cancelto{0}{\upsilon_{0y}} . \Delta t + \frac{1}{2} g . \Delta t^2$
$h = \frac{1}{2} g . \Delta t^2$

$$\Delta t^2 = \frac{2h}{g} = \frac{2 . 4{,}5 m}{9{,}8 m/s^2}$$

$\Delta t = 0{,}96 s$



d) $x = \upsilon o . \Delta t$
$x = 9{,}39 m/s . 0{,}96\ s$
$x = 9 m$

e) $\vec{\upsilon_x} = \vec{\upsilon_0} = (9{,}39\ \vec{i})\ m/s$

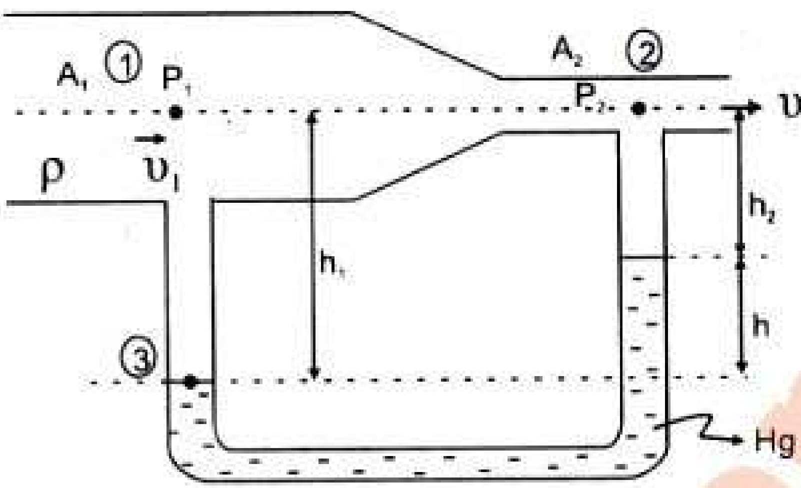
$\upsilon_y = \cancelto{0}{\upsilon_{0y}} + g . \Delta t$
$\upsilon_y = 9{,}8\ m/s^2 . 0{,}96\ s$
$\upsilon_y = 9{,}41\ m/s$
$\vec{\upsilon_y} = (-9{,}41\ \vec{j})\ m/s$

$\vec{\upsilon} = \upsilon_x \vec{i} + \upsilon_y \vec{j}$

$\vec{\upsilon} = (9{,}39\ \vec{i} - 9{,}41\ \vec{j})\ m/s$

7.4.3 Medidor de Venturi:

Es un aparato que permite determinar la velocidad de un líquido. Básicamente consiste en un tubo en U, con mercurio de densidad ρ_{Hg}, que se adapta al tubo en dos puntos cuyas secciones son A_1 y A_2 por donde fluye el líquido de densidad ρ:



Aplicando la ecuación de Bernoulli a los puntos (1) y (2) se tiene:

$P_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2$ **(1)**, porque (1) y (2) están al mismo nivel.

Por la ecuación de continuidad tenemos que:

$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2$ **(2)**

Igualando la presión en el nivel (3) en las dos ramas del tubo en U:

$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2 + \rho_{Hg} \cdot g h$ **(3)**

Despejando υ_2 de (2) y reemplazando en (1):

$$\upsilon_2 = \frac{A_1 \cdot \upsilon_1}{A_2} \quad \textbf{(2)}$$

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 \quad \textbf{(1)}$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\upsilon_2^2 - \frac{1}{2}\rho\upsilon_1^2$$

$$P_1 - P_2 = \frac{1}{2}\rho\left[\frac{A_1^2 \cdot \upsilon_1^2}{A_2^2} - \upsilon_1^2\right]$$

$$2(P_1 - P_2) = \rho\upsilon_1^2\left[\frac{A_1^2}{A_2^2} - 1\right]$$

$$\upsilon_1^2 = \frac{2A_2^2(P_1 - P_2)}{\rho\,(A_1^2 - A_2^2)}$$

$$\upsilon_1 = A_2\sqrt{\frac{2\,(P_1 - P_2)}{\rho\,(A_1^2 - A_2^2)}} \qquad \textbf{(7.4.3.1)}$$

Despejando P_2 en (3) y reemplazando en la ecuación anterior:

$P_2 = P_1 + \rho\,gh_1 - \rho\,gh_2 - \rho_{Hg}.gh$ (3)

$$\upsilon_1 = A_2\sqrt{\frac{2(P_1 - P_1 - \rho\,gh_1 + \rho\,gh_2 + \rho_{Hg}.gh)}{\rho\,(A_1^2 - A_2^2)}}$$

$$\upsilon_1 = A_2\sqrt{\frac{2(\rho_{Hg}.gh - \rho\,g(h_1 - h_2))}{\rho\,(A_1^2 - A_2^2)}} = A_2\sqrt{\frac{2(\rho_{Hg}.gh - \rho\,gh)}{\rho\,(A_1^2 - A_2^2)}}$$

$$\upsilon_1 = A_2\sqrt{\frac{2(\rho_{Hg} - \rho\,)gh}{\rho\,(A_1^2 - A_2^2)}} \qquad \textbf{(7.4.3.2)}$$

Ejemplos:

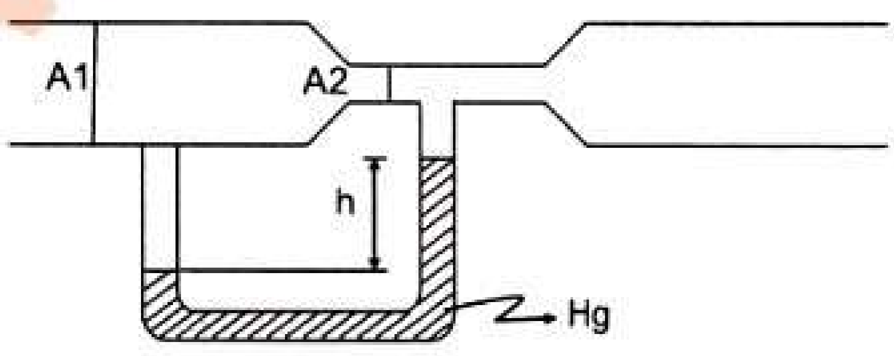
1.- El medidor de Venturi de la figura tiene un diámetro de 20cm en la parte ancha y 10cm el estrechamiento. Si la presión del agua en la parte ancha es de $2.8kg/cm^2$ y en estrechamiento $1.3kg/cm^2$, determinar:

a) La rapidez del agua en la parte ancha

b) El caudal en l/s

c) La diferencia de presiones entre la parte ancha y estrechamiento.

d) La diferencia de alturas (h) entre las columnas de mercurio del tubo en U



$A_1 = \pi R_1^2 = \pi(10\ cm)^2 = 314,16\ cm^2$
$A_2 = \pi R_2^2 = \pi(5\ cm)^2 = 78,54\ cm^2$
$P_1 = 2,8\ kg/cm^2 = 2,744 \times 10^5\ N/m^2$
$P_2 = 1,3kg/cm^2 = 1,274 \times 10^5\ N/m^2$

a) Aplicando la ecuación del medidor de Venturi, tenemos:

$$\upsilon_1 = A_2 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho\ (A_1^2 - A_2^2)}}$$

$$\upsilon_1 = 78,54\ cm^2 \sqrt{\frac{2(2,744 \times 10^5\ N/m^2 - 1,274 \times 10^5\ N/m^2)}{1000\ kg/m^3\ ((0,031416 m^2)^2 - (0,007854\ m^2)^2)}}$$

$$\upsilon_1 = 0,007854\ m^2 \sqrt{\frac{2,94 \times 10^5\ N/m^2}{0,93\ kgm}}$$

$$\upsilon_1 = 4,42\ m/s$$

Utilizando la ecuación de la continuidad, encontramos υ_2:

$$A_1\upsilon_1 = A_2\upsilon_2$$

$$\upsilon_2 = \frac{A_1 . \upsilon_1}{A_2} = \frac{314,16\ cm^2 . 4,42\ m/s}{78,54\ cm^2}$$

$$\upsilon_2 = 17,68\ m/s$$

b) $Q = A_1\upsilon_1$
$Q = 314,16\ cm^2\ . 4,42\ m/s$
$Q = 314,16\ cm^2 . 442\ cm/s$
$Q = 138858,72\ cm^3/s$
$Q = 138,86\ l/s$

c) $P_1 - P_2 = 2,744 \times 10^5\ N/m^2 - 1,274 \times 10^5\ N/m^2$
$P_1 - P_2 = 1,47 \times 10^5\ N/m^2$

d) $P_1 - P_2 = \rho' gh$

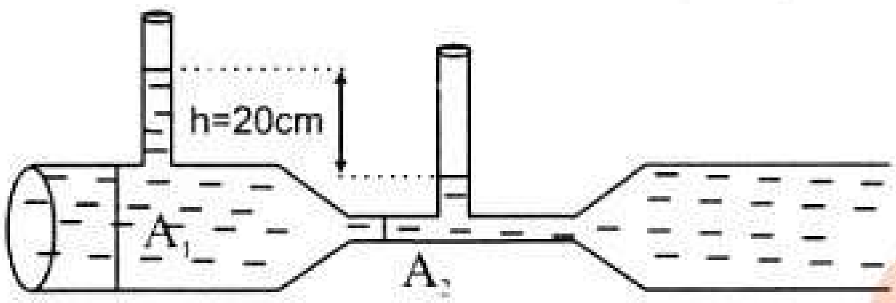
$$h = \frac{P_1 - P_2}{\rho' g} = \frac{1,47.10^5\ N/m^2}{13600\ kg/m^3 . 9,8\ m/s^2}$$

$$h = 1,1\ m$$

2.- Para el medidor de la figura, el cociente entre las áreas A_1 y A_2 es 10 y la diferencia de alturas ente los dos tubos verticales es 20cm. Si el líquido es agua, calcular:

a) la rapidez en la parte ancha

b) la rapidez en el estrechamiento.



a) Utilizando la ecuación de la continuidad, tenemos:

$A_1 . \upsilon_1 = A_2 . \upsilon_2$ $\qquad \upsilon_2 = (A_1 / A_2)\,\upsilon_1 \quad (1)$

Aplicando la ecuación de Bernoulli, tenemos:

$P_1 + \rho g h_1 + ½\rho\ \upsilon_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + ½\rho\ \upsilon_2^2$, como $h_1 = h_2$

$P_1 + ½\rho\ \upsilon_1^2 = P_2 + ½\rho\ \upsilon_2^2, \quad (2)$

Reemplazando (1) en (2)

$P_1 + ½\rho\upsilon_1^2 = P_2 + ½\rho\,(A_1/A_2)^2 .\ \upsilon_1^2,$

$P_1 - P_2 = ½\rho\upsilon_1^2\,[(A_1/A_2)^2 - 1]$, como $P_1 - P_2 = \rho\, gh$

$\rho\, gh = ½\rho\upsilon_1^2\,[(A_1/A_2)^2 - 1]$

$$\upsilon_1^2 = \frac{2gh}{(A_1\ A_2^2) - 1} = \frac{2.\ 9{,}8\ m/s^2\ .\ 0{,}2\ m}{(10)^2 - 1} = \frac{3{,}92\ m^2/s^2}{99}$$

$\upsilon_1 = 0{,}2$ m/s

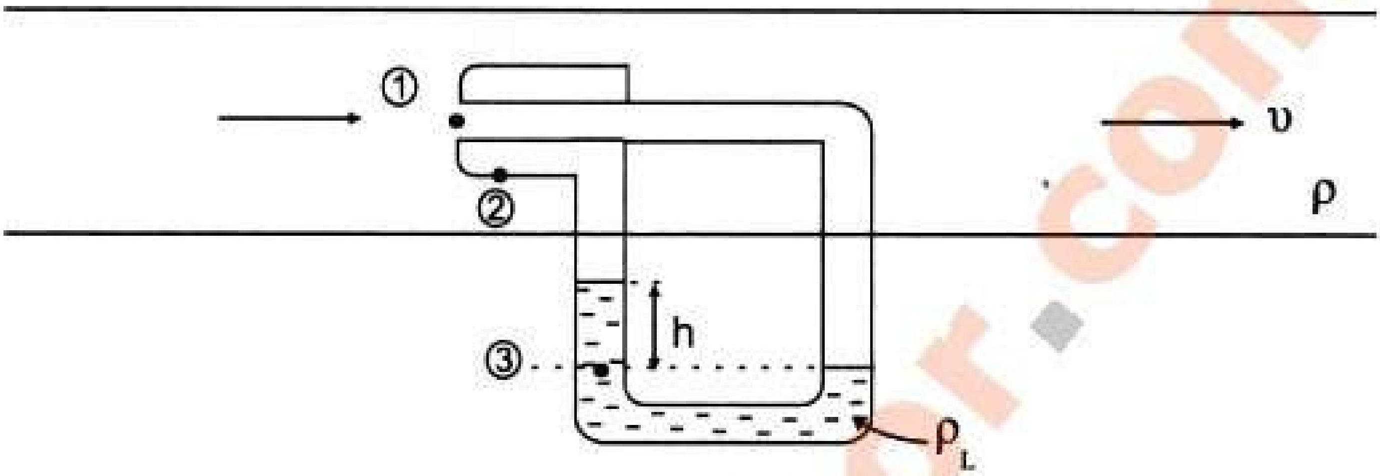
b) Aplicando la ecuación (1)

$$\upsilon_2 = \frac{A_1}{A_2}\,\upsilon_1 = 10(0{,}2\ m/s)$$

$\upsilon_2 =$ 2m/s

7.4.4 Tubo Pitot:

Se utiliza para determinar la velocidad de un fluido. La abertura (1) es perpendicular al movimiento del fluido, en ese punto la presión es P_1 y la velocidad υ_1. Una vez colocado el aparato, υ_1 es nula. En (2) se tiene una abertura paralela al flujo, la presión es P_2 y la velocidad del fluido es υ_2



Aplicando a la ecuación de Bernoulli se tiene.

$$P_1 + \rho g h_1 + \tfrac{1}{2}\rho\, \upsilon_1^2 = P_2 + \rho g h_2 + \tfrac{1}{2}\rho\, \upsilon_2^2$$

$$P_1 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho \upsilon^2 \quad \textbf{(1)}$$

Igualando la presión en el nivel (3) en las dos ramas del tubo en U :

$P_1 = P_2 + \rho_L . g . h$ **(2)**, donde ρ_L es la densidad del líquido en el tubo en U

No se toma en cuenta las columnas de fluido en el tubo en U, puesto que éste medidor se lo utiliza generalmente para determinar la velocidad de fluidos gaseosos, por lo que sus columnas prácticamente no ejercen presión, si sus alturas son pequeñas.

Igualando (1) y (2) y despejando υ se obtiene:

$$P_2 + \tfrac{1}{2}\rho \upsilon^2 = P_2 + \rho_L . g . h$$

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2\rho_L . g . h}{\rho}} \qquad \textbf{(7.4.4)}$$

Ejemplo:

Un tubo de pitot está instalado en el ala de un avión para determinar la rapidez de éste con relación al aire ($0.00129 g/m^3$). El tubo contiene mercurio ($13.6 g/cm^3$) e indica una diferencia de nivel de 30cm. Determinar la velocidad del avión con respecto al aire.

$\rho_L = 13,6\ g/cm^3 = 13600\ kg/m^3$
$\rho = 0,00129\ g/m^3 = 1,29\ kg/m^3$
$h = 0,3\ m$

Aplicando la ecuación del tubo de pitot, tenemos

$$\upsilon = \sqrt{\frac{2\,\rho_L.g.h}{\rho}}$$

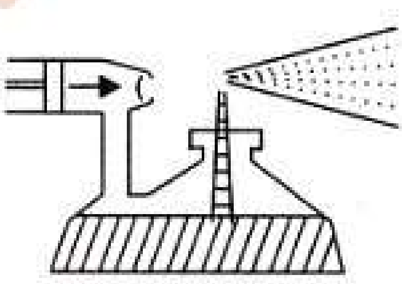
$$\upsilon = \sqrt{\frac{2.13600\ kg/m^3\ .\ 9,8\ m/s^2\ .\ 0,3\ m}{1,29\ kg/m^3}}$$

$\upsilon = 248,98\ m/s$

7.4.5 Atomizador:

La disminución de presión en un estrechamiento tiene múltiples aplicaciones prácticas, una de estas es el atomizador.

En éste, una corriente de aire pasa por la parte superior de un tubo vertical. Según la ecuación de Bernoulli, en esta región la presión es menor que en la superficie libre del líquido del recipiente, esto determina que el líquido ascienda y la corriente de aire lo divida en innumerables gotas microscópicas:



7.5 EJERCICIO Nº 10

1.- En un tubo horizontal de sección variable, las secciones transversales tienen diámetros de 20cm y 12 cm respectivamente. Si por el tubo circula agua con una rapidez de 14,5m/s por la parte estrecha, calcular:
a) La rapidez en la parte ancha
b) El gasto en litros por segundo
c) El gasto diario

2.- Por un tubo horizontal de sección variable circula agua, donde las secciones transversales son 5 cm^2 y 10cm^2 respectivamente. Si en la parte ancha la rapidez es de 1,2 m/s y la presión es 75 N/m^2, calcular:
a) La rapidez en el estrechamiento
b) El caudal
c) La presión en el estrechamiento

3.- En un tubo horizontal de sección variable, las secciones transversales son 21cm^2 y 7cm^2 respectivamente. Si por el tubo fluye agua de mar (1,07 g/cm^3) y las presiones manométricas en el estrechamiento y parte ancha son 2,5 N/cm^2 y 3,9N/cm^2, calcular:
a) La rapidez del líquido en la parte ancha y estrechamiento.
b) El caudal

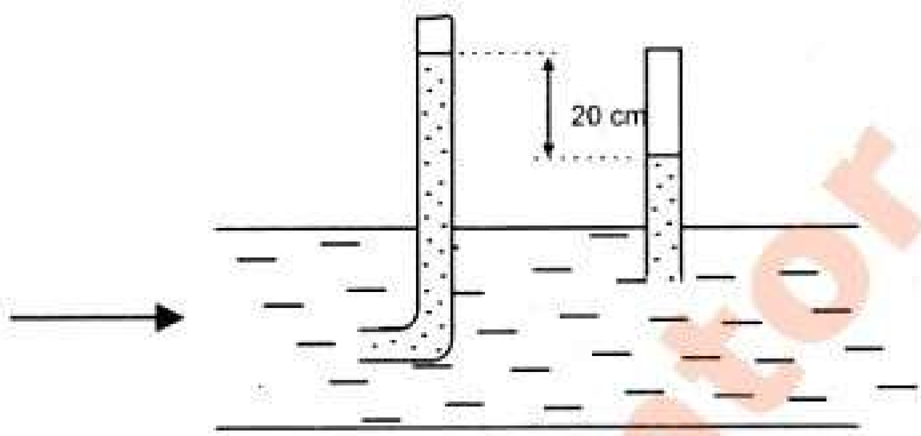
4.- Por una tubería inclinada de sección uniforme fluye estacionariamente un líquido de densidad 900kg/m^3. Si el desnivel entre dos puntos de la tubería es 5 m, determinar la diferencia de presiones.

5.- Por un tubo inclinado de sección uniforme, fluye estacionariamente agua. La presión en un punto situado a 6 m del suelo excede a la presión en otro punto más alto en $3x10^5$Pa. Calcular la altura a la que se encuentra el segundo punto en relación al piso.

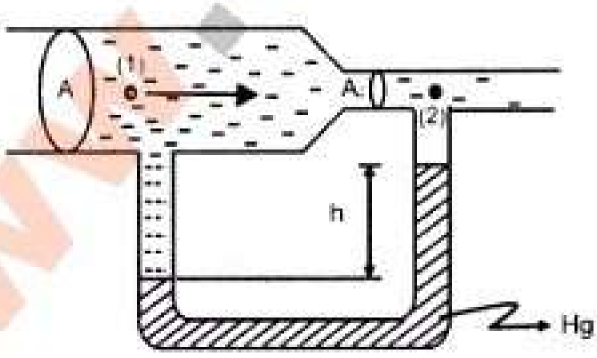
6.- Por una tubería horizontal de sección circular fluye estacionariamente un líquido de densidad 950 kg/m^3. En determinada sección la rapidez del líquido es de 12m/s y el radio de la tubería es 0,1 m. Determinar:
a) El radio de la tubería en una sección en la que la rapidez del líquido es 6m/s
b) La presión en la primera sección, si en la segunda es de 2,4 x 10^5 Pa.

7.- En un tubo horizontal de sección variable, las secciones transversales tienen radios de 3cm y 12 cm respectivamente. Cuando por el tubo fluye agua, la diferencia de presiones entre la parte ancha y estrecha es de 20.4 N/cm^2, calcular:
a) La rapidez del líquido en la parte ancha y estrecha
b)El caudal

8.- Por un tubo horizontal circula un fluido en el sentido indicado en la figura. La diferencia de niveles entre el tubo de Pitot y el manométrico es de 20cm. Determinar la rapidez del fluido



9.- Por el medidor de Venturi de la figura, circula agua con un caudal constante de 10 litros/s. Determinar:
a) Las velocidades en las secciones (1) y (2)
b) La diferencia de presión entre las secciones (1) y (2)
c) El valor de la altura h



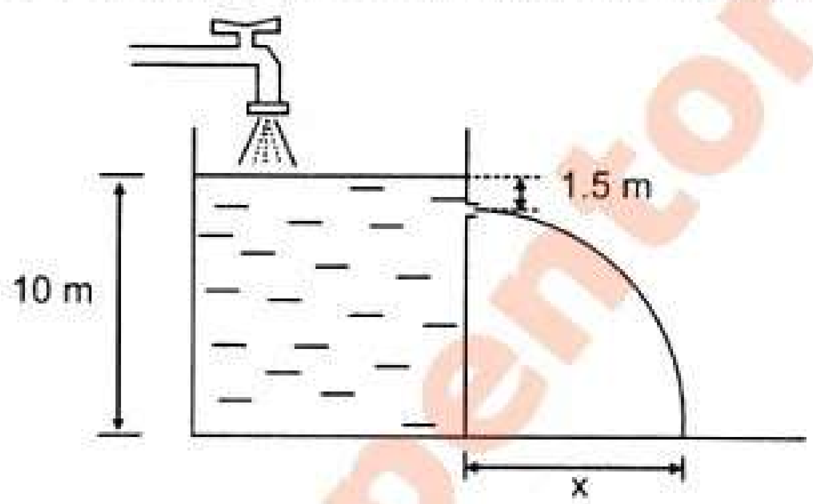
$A_1 = 40\ cm^2$
$A_2 = 10\ cm^2$

10.- En un tanque que contiene gasolina se practica un orificio circular de 5 mm de radio a una profundidad de 1.8m . Calcular:
a) La rapidez de salida de gasolina por el orificio
b) El gasto en l/s
c) La cantidad de gasolina que sale en 5 minutos.

11.- En un depósito grande que contiene petróleo, la presión en un orificio practicado en su pared vertical es de 15 N/cm^2. Calcular:
a) La profundidad del orificio
b) La velocidad de salida del liquido
c) La velocidad del líquido en un punto del chorro situado a 1,2m debajo del orificio

12.- Un tubo horizontal de sección uniforme tiene un diámetro de 4cm. Si por el tubo circula petróleo con una rapidez de 5m/s y una presión de 100 N/cm^2, calcular:
a) El gasto
b) La cantidad de petróleo que pasa en un minuto, por una sección

13.- En la figura el depósito contiene gasolina y mantiene su nivel libre constante. Calcular:



a) A que distancia X del pie de la pared alcanza el suelo el chorro que sale por el orificio
b) A qué altura por encima del fondo del depósito puede practicase otro orificio, para que el chorro que sale de él tenga el doble del alcance anterior. (Si fuese posible)

14.- En la pared lateral de un depósito lleno de gasolina hasta una altura constante de 5,2 m hay dos orificios situados en la misma vertical. Abiertos los dos orificios se ve que el alcance horizontal de los dos chorros es el mismo. Si el orificio inferior dista 1.5m del fondo, calcular:
a) El alcance horizontal
b) La distancia del orificio superior a la superficie libre del líquido

15.- Un depósito contiene agua hasta una altura constante de 8,1m. A 3,9m de la superficie libre del líquido hay un orificio de 1cm de radio. Calcular:
a) El gasto en l/s
b) El alcance horizontal del chorro
c) La rapidez de salida de agua, si la parte superior del depósito actúa una presión igual al doble de la atmosférica

7.6 EVALUACIÓN OBJETIVA

Completar

1.- Gasto es el producto del…………..………..por……………………………..

2.- Cuando hay un aumento en la velocidad de un fluido, la presión ....
……………………………………..

3.- Lineas de corriente muy espaciadas, indican regiones de ....
…………………..velocidad

4.- La velocidad de salida de un fluido por un orificio es……………proporcional a la raiz cuadrada de la profundidad

5.- La velocidad de un fluido en un tubo de corriente es ....
…………………proporcional a la sección recta.

6.- El movimiento de un fluido es estable, cuando en cualquier punto la ……………..la……………………….y la………………permanecen constantes

7.- Línea de corriente es la…………………………seguida por una partícula

8.- Caudal es el……………………..de líquido transportado en la ....
……………………..de tiempo.

9.- Un tubo de corriente está formado por un conjunto ……………………..de líneas de corriente.

10.- En el movimiento de un fluido en régimen estable, la suma de las medidas de las presiones……………………..,…………………y……………………… permanece constante en cualquier punto del fluido.

11.- En el movimiento de un fluido por un tubo horizontal de sección variable la velocidad es máxima en la parte ………………………del tubo y la presión es mínima en la parte………………………..del tubo.

12.- La ecuación de Bernoulli es la expresión matemática de la conservación de la……………………………………..en un fluido ideal

13.- La rapidez con la que fluye agua por una tubería inclinada de sección uniforme es...

14.- La rapidez con la que fluye agua por una tubería horizontal de sección variable es.............................

15.- Cuando un tren viaja a gran velocidad, los papeles que se encuentran cerca de la línea férrea se mueven hacia...................................de ésta.

Escribir (V) verdadero o (F) falso:

1.- En el movimiento estable las líneas de corriente son paralelas a las paredes del tubo...( )

2.- Una velocidad alta está acompañada de una presión baja.......................( )

3.- La velocidad de salida de un líquido por un orificio es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad...............................( )

4.- A mayor velocidad las líneas de corriente están mas separadas................( )

5.- Para que el caudal permanezca constante, al reducir el área se reduce la velocidad...( )

6.- En el movimiento turbulento las líneas de corriente cambian continuamente de dirección...( )

7.- En el movimiento de un fluido por un tubo de corriente de sección variable, cuanto menor sea el área de la sección recta, tanto más rápido fluye el fluido...( )

8.- En el movimiento de un fluido por un tubo horizontal de sección variable, la velocidad es mínima en la parte estrecha del tubo.............................( )

9.- En el movimiento de un fluido por un tubo horizontal de sección variable, la presión es máxima en la parte ancha del tubo...................................( )

10.- La rapidez de salida de un fluido por un orificio practicado en una pared o en el fondo de un recipiente. es la misma que tendrían las moléculas del líquido. si cayeran libremente desde la superficie libre del líquido hasta el orificio..( )

11.- Si por sobre el techo de una casa pasa una ráfaga de viento muy rápida, el techo tiende a levantarse.. ( )

12.- La ecuación de la continuidad representa la conservación de la energía mecánica en los fluidos.. ....( )

13.- Un recipiente contiene agua hasta un nivel constante de altura H. la profundidad a la que debe practicarse un orificio para que el agua llegue al piso a una distancia de la base del recipiente igual a H, debe ser (H/2)..( )

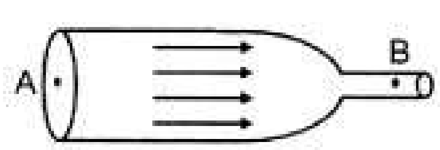
14.- En una tubería horizontal de sección variable circula agua. Esta circulación siempre va de un lugar de mayor presión a otro de menor presión..( )

15.- En una tubería inclinada de sección constante, la velocidad con la que circula un líquido es mayor en la parte inferior que en la superior ....( )

Subrayar la respuesta correcta.

1.- El movimiento de un fluido es estacionario cuando.
a) todas sus partículas están en reposo.
b) todas las partículas poseen igual velocidad
c) todas las partículas que pasan por un punto determinado lo hacen con igual velocidad.
d) N.R.A

2.- A través del tubo de la figura se mueve un fluido incompresible:
2.1 La densidad del fluido:
a) es mayor en A que en B
b) es mayor en B que en A
c) en A y en B es igual
d) N.R.A



2.2 La cantidad del fluido que atraviesa en un una unidad de tiempo:

a) es mayor en A que en B

b) es menor en A que en B

c) es igual en A y en B

d) N.R.A.

2.3 La presión total:

a) es mayor en A que en B

b) es menor en A que en B

c) es igual en A y en B

d) N.R.A.

2.4 La velocidad:

a) en la sección A es mayor que en la sección B

b) en la sección B es mayor que en la sección A

c) en las secciones A y B es la misma

d) N.R.A.

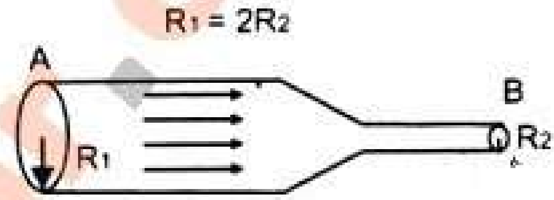
3.- Por el tubo de la figura fluye agua, la velocidad en la sección A en relación a la sección B es:

a) igual

b) 2 veces menor

c) 4 veces menor

d) N.R.A.



4.- La ecuación de la continuidad se basa en la conservación de

a) la energía mecánica

b) la masa

c) la energía cinética

d) N.R.A.

5.- Si las líneas de corriente de un fluido se acercan (estrechan) la velocidad del fluido en esa región:

a) aumenta

b) disminuye

c) permanece constante

d) N.R.A.

6.- Al observar un chorro de agua que cae desde una llave, se advierte que éste se hace cada vez más fino. Esto se debe a que:

a) la densidad del agua disminuye

b) la presión aumenta

c) la velocidad aumenta

d) N.R.A.

7.- La ecuación de Bernoulli se basa en la conservación de:

a) La energía cinética

b) La masa

c) La energía mecánica

d) N.R.A.

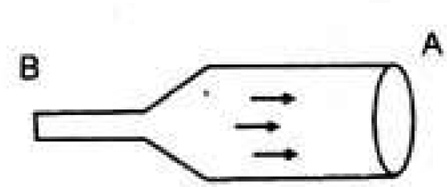
8.- La tubería horizontal de la figura conduce un fluido de densidad ρ. Si la sección en B es la mitad de la sección en A y la diferencia de presión entre estas dos seciones es P, la velocidad del fluido en A es:

a) $2(P/\rho)$

b) $\sqrt{2P/3\rho}$

c) $\sqrt{2P/\rho}$

d) N.R.A.



9.- Por un tubo horizontal fluye agua (ρ) con un caudal Q. En una región (A) el tubo tiene un área A_A y una presión P_A. Si en otra región (B) el área A_B es igual a $4A_A$ la velocidad del agua en cada sección y la presión en (B) es:

a) $\upsilon_A = Q/A_A$; $\upsilon_B = Q/A_B$; $P_B = P_A + 3/2\,(\rho\upsilon_B^2)$

b) $\rho\upsilon_A = \upsilon_B = Q/A_A$; $P_B = P_A + 15/2\,(\rho\upsilon_A^2)$

c) $\upsilon_A = Q/A_A$; $\upsilon_B = Q/A_B$; $P_B = P_A + 15\,\rho\,\upsilon_B^2/2$

d) N.R.A.

10.- La diferencia de presión entre dos puntos separados una distancia L de una tubería de sección uniforme e inclinada un ángulo θ con la horizontal, por la que fluye estacionariamente un líquido (ρ) incompresible, es:

a) $\rho.g.L$

b) $\rho.g.L.\cos\theta$

c) $\rho.g.L.\text{sen}\,\theta$

d) N.R.A.

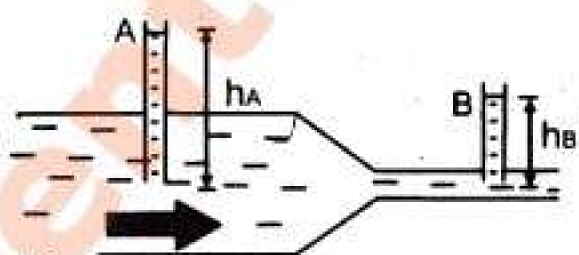
11.- En la figura se representa un tubo horizontal por el que fluye agua a régimen estacionario. La altura alcanzada por el agua en los tubos manométricos A y B cumplen que:

a) $h_A = h_B$

b) $h_A > h_B$

c) $h_A < h_B$

d) N.R.A.



13.-

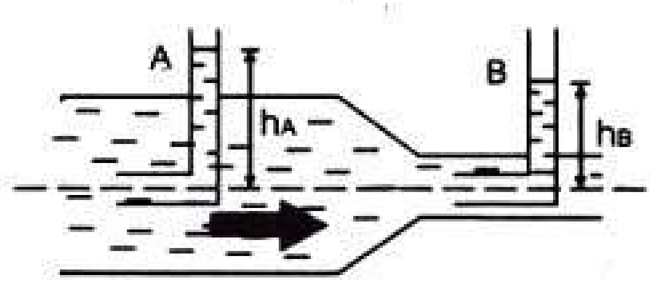
12. En la figura se representa un tubo horizontal por el que fluye agua a régimen estacionario. La altura alcanzada por el agua en los tubos de Pitot A y B, cumple que:

a) $h_A = h_B$

b) $h_A > h_B$

c) $h_A < h_B$

d) N.R.A.



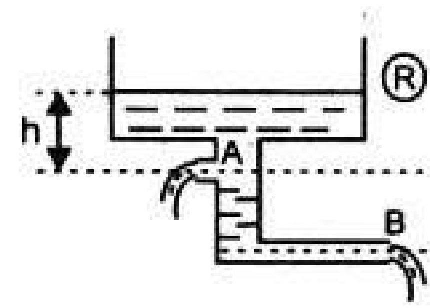
13.- En el sistema de la figura, los orificios A y B son iguales. La velocidad de salida del líquido del recipiente R, cumple que:

a) $\upsilon_A = \upsilon_B$

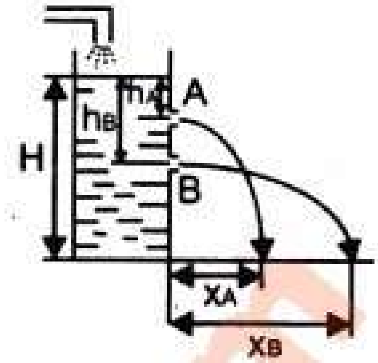
b) $\upsilon_A > \upsilon_B$

c) $\upsilon_A < \upsilon_B$

d) N.R.A.



14.- El recipiente de la figura contiene un líquido cuyo nivel permanece constante y se halla a una altura H. La relación (h_A / h_B) entre las profundidades de los orificios, para que $X_B = H = 2X_A$, es igual a:



a) $h_A / h_B = 1/2$
b) $h_A / h_B = 1 - \sqrt{3/2}$
c) $h_A / h_B = \sqrt{3}/2$
d) N.R.A.

15.- Un depósito muy grande y cerrado contiene agua de densidad ρ, hasta cierta altura h y aire en la parte superior a una presión 3Po, donde Po es la presión atmosférica. Si abre un orificio en el fondo del depósito, la velocidad de salida del agua en la atmósfera es:

a) $\upsilon = \sqrt{2gh}$

b) $\upsilon = \sqrt{2(2Po + \rho gh)/\rho}$

c) $\upsilon = \sqrt{2(3Po + \rho gh)/\rho}$

d) N.R.A.

VALLEJO - ZAMBRANO

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS IMPARES

2011

FISICA VECTORIAL 2

RESPUESTAS A LOS PROBLEMAS IMPARES

Ejercicio N°1

1. a) $I_{AB} = 5ma^2$, $R_{GAB} = \sqrt{5/8}\,a$; $I_{BC} = 4\ ma^2$, $R_{GBC} = \sqrt{1/2}\,a$; $I_{CD} = 3\ ma^2$, $R_{GCD} = \sqrt{3/8}\,a$; $I_{DA} = 4ma^2$, $R_{GDA} = \sqrt{1/2}\,a$; $I_{AC} = 5/2\ ma^2$, $R_{GAC} = \sqrt{5}\,a/4$; $I_{BD} = 3/2\ ma^2$, $R_{GBD} = \sqrt{3}\,a/4$; b) $I_0 = 4ma^2$

3. $I = L^2(m+m_a)/12$

5. $\alpha = 14{,}70\ rad/s^2$

7. a) $a = 1{,}5\ m/s^2$; b) $R_G = 0{,}09\ m$

9. $a = 2{,}65\ m/s^2$

Ejercicio N°2

1. $\vec{F} = (14\vec{i} - 17\vec{j})\ N$; $\vec{\Delta r} = (15\vec{i} + 4\vec{j})\ m$; $T = 142\ J$

3. a) $T = 88200\ J$; b) $T = -88200\ J$; c) $T_{NETO} = 0\ J$

5. $T = 510000\ J$

7. $T = 42924\ J$

9. a) $L = 4{,}48\ m$; b) $T = 1568\ J$; c) $T = 0\ J$; d) $T = -1568\ J$; e) $T_{NETO} = 0\ J$

11. a) $T = 3090{,}96\ J$; b) $T_N = 0\ J$; c) $T_{mg} = -980\ J$; d) $T_{fr} = -173{,}84\ J$; e) $T_{NETO} = 1940{,}12\ J$

Ejercicio N°3

1. $P = 558{,}5\ W$

3. a) $t = 13{,}23\ s$; $d = 150{,}7\ m$; b) $t = 14{,}08\ s$; $d = 246{,}4\ m$

5. $t = 210{,}19\ s$

7. $P = 3{,}59\ W$

9. a) $P = 1503{,}85\ HP$; b) $P = 2206{,}97\ HP$; $P' = 3529{,}29\ HP$; c) $F = 569100\ N$; $F' = 630845{,}64\ N$

11. a) $t = 68{,}03\ s$; b) $P_{mg} = 19601{,}98\ W$; c) $P_{NETA} = 58802{,}59\ W$; d) $P_{CAM\,(máx)} = 274400\ W$

Ejercicio N°4

1. a) $T_{útil} = 7350\ J$; b) $T_{perdido} = 1450\ J$; c) $\eta = 0{,}835\ (83{,}5\%)$

3. $P = 251{,}55\ HP$

5. a) $P = 22929{,}56\ HP$; b) $T_{perdido} = 7{,}056 \times 10^8 J$

Ejercicio N°5

1. a) F = 928,42 N; b) F = 892,32 N
3. a) Peso = 27,73 N; b) Peso = 13,01 N; c) V_M = 0,19; V_M = 0,09
5. a) 4679,5 N; b) 4900 N
7. a) 19,5 cm; b) 39 cm; c) V_M = 0,075; V_M = 0,075
9. a) Peso = 879,9 N; b) d = 35 cm; c) T = 307,97 J; d) V_M = 1,995
11. a) F = 245 N; b) T = 3185 J; c) V_M = 2,6
13. a) Peso = 1333,33 N; b) V_M = 3,33

Ejercicio N°6

1. a) Ec_0 = 3750 J; b) Ec_f = 0 J; c) μ = 0,283
3. a) 1562,5 J; 0; 1562,5 J; b) 504,1 J; 1058,4 J; 1562,5 J; c) 827,5 J; 735 J; 1562,5 J
5. a) Ep_s = 23,52 J; b) υ = 15,34 m/s; c) υ = 15,34 m/s
7. a) x = 3,3 m; b) υ = 8,75 m/s
9. υ = 6,05 m/s
11. a) 137200 J; b) 62,61 m/s; c) 68600 J; d) 68600 J; 343000 J; e) 293000 J
13. a) 2,66 m/s; b) 3,94 m/s^2; c) 6,87 N
15. a) 1587,6 J; b) 3,24x10^{-5} m
17. a) 3,42 m/s; b) 5,93 m/s; 5,86 N; c) 7,66 m/s; 11,74 N
19. a) 0,49 Kg; b) 12,522 m/s; c) 12,52 m/s
21. a) 64 J; b) 7,72 m
23. a) 130,65 N; b) No puede regresar al punto de partida.
25. a) 5,06 J; b) 2,25 m/s; c) 0,26 m; d) 0,69 m
27. a) 8,97 m/s; b) 1,49 m/s^2; c) 89,70 rad/s (del cilindro)
29. a) 48,19° de la vertical

Ejercicio N°7

1. a) 20000 $\vec{i}$ Kg m/s
3. a) 2000 N.s (2000 Kg m/s); b) 1000 m/s
5. a) 3 m/s; b) 150 N
7. a) $\overrightarrow{\upsilon_0} = (7,5\,\vec{i} - 15\,\vec{j}\,)$ m/s; b) 16,77 m s; S 26,56° E
9. a) m_B = 8 Kg (Si el cuerpo A choca con velocidad υ_A, con el cuerpo B, igual pero de dirección contraria a la que tiene luego del choque); b) Cuerpo A: -6 υ_A ; Cuerpo B: 4 υ_A
11. a) 13,74 m/s; b) -166,67 J
13. a) -15 $\vec{j}$ m/s; b) -40 $\vec{j}$ m/s
15. a) 0,75 m/s; b) 0,27 s; c) 0,29; d) 1050 J

Ejercicio Nº8

1. a) $x = 5\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ cm; $\upsilon = \frac{5\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ cm/s; $a = -\frac{5\pi^2}{4}\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}t\right)$ cm/s^2; b) 0,37 N/m (370 Dinas/cm); c) 0,068 m/s (6,8 cm/s); d) 0,123 m/s^2 (12,3 cm/s^2); e) 0

3. a) 4 cm; 2 rad/s; 0; b) 0,32 N/m; c) $3{,}96\text{x}10^{-2}$ m; d) $2{,}5\text{x}10^{-4}$ J; e) 0,158 m/s^2

5. a) $x = 8\text{sen}(120\pi t)$ cm; $\upsilon = 960\pi\cos(120\pi t)$ cm/s; $a = -115200\pi^2\,\text{sen}(120\pi t)$ cm/s^2; b) 1/240 s; c) 0; d) 0; e) 34,11 J

7. a) 0,086 N/m; b) 7,07 m; c) 0,608 N; d) 2,16 J; e) 2 s

9. a) 0,15 m; 10,408 rad/s; 0,604 s; b) 13 N; c) $\upsilon = 10{,}408\sqrt{0{,}15^2 - y^2}$; $a = -(10{,}408)^2 y$, (donde y es la posición medida desde la posición de equilibrio); d) 1,43 m/s; 6,5 m/s^2; e) 37,58 J

11. a) 2,29 s; b) 0,505 m/s; c) 1,99N; d) 0,103 N; e) 0,026 J

13. a) 24,5 N/s; b) 4 cm; 15,65 rad/s; 2,49 Hertz; 0,40 s; c) 0,49 N; d) 0,443 m/s; -2,45 m/s^2; e) 0,06 J

15. a) $\frac{\pi}{6}$ rad/s; b) 18 cm; c) $\frac{\pi}{2}$ rad; d) $x = 18\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right)$ cm;

$\upsilon = 3\pi\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right)$ cm/s; $a = -\frac{\pi^2}{2}\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{\pi}{2}\right)$ cm/s^2

17. a) 2 cm; 0,25 rad/s; $\frac{\pi}{6}$ rad; b) $1{,}88\text{x}10^{-3}$ N/m; c) $3{,}67\text{x}10^{-3}$ N; d) $1{,}01\text{x}10^{-3}$ m/s; e) $3{,}75\text{x}10^{-3}$ J

19. a) $3{,}09\text{x}10^{-2}$ N/m; b) 2,62 m; c) 0,106 J; d) -1,47 m/s^2; e) $\frac{10\pi}{9}$ s

Ejercicio Nº9

1. a) 60 m^3; b) 758,52 N

3. a) 1323,9 cm^3; b) 10,38 N

5. a) 13,5 cm^2; b) $5{,}23\text{x}10^5$ Pa

7. $1{,}77\text{x}10^7$ Pa

9. a) $1{,}11\text{x}10^5$ Pa; $1{,}02\text{x}10^5$ Pa; $1{,}017\text{x}10^5$ Pa; $1{,}013\text{x}10^5$ Pa; b) $1{,}2\text{x}10^5$ Pa; 3769,9 N

11. A 20,47 m

13. a) 0,184 m; b) 2,316 m

15. 1,3 cm

17. 2,06 cm

19. a) 452,22 N; b) 10,27 cm; c) $1{,}28\text{x}10^5$ J

21. a) 659,09 Kg/m^3; b) 8,81 cm

23. a) 15 cm; b) 0 cm
25. a) 9,92N; b) 39,69N; c) T = 4870,23 N
27. a) 14 m/s; b) 2,744 N; c) 7,354 $\vec{j}$ m/s^2; d) 1,90 s
29. a) 948,15 N; b) 848,15 N; c) 377,75 N; d) 0,514 Kg/m^3

Ejercicio N°10

1. a) 5,22 m/s; b) 163,99 l/s; c) 1,416x10^7 l/día
3. a) 1,81 m/s; 5,43 m/s; b) 3,8x10^{-3} m^3/s
5. 36,61 m
7. a) 1,265 m/s; 20,24 m/s; b) 0,057 m^3/s
9. a) 2,5 m/s; 10 m/s; b) 46875 Pa; c) 0,38 m
11. a) 19,13 m; b) 19,36 m/s; c) $(19{,}36\vec{i} - 4{,}85\vec{j})$ m/s
13. a) 7,14 m; b) No es posible si se mantiene el nivel de los 10 m constante
15. a) 2,746 l/s; b) 8,09 m; c) 16,70 m/s

APUNTES

Poliediciones

Distribuidor Exclusivo de:

- Física Vectorial 1, Vallejo Z.
- Física Vectorial 2, Vallejo Z.
- Física Vectorial 3, Vallejo A.
- Laboratorio de Física 1 Vallejo A.
- Laboratorio de Física 2 Vallejo A.
- Laboratorio de Física 3 Vallejo A.

- Problemas Propuestos y Resueltos de Física (Libro del Búho)
  Tasiguano - Camacho - Aldaz - Vallejo

- Física Vectorial Elemental, Panchi Núñez

- Geometría Básica 1, Albuja-Santacruz-Vallejo
- Geometría Básica 2, Albuja-Santacruz-Vallejo

- Geometría Plana y del Espacio, Calvache-Rosero-Yacelga

- Fundamentos de Química 1, Bucheli
- Fundamentos de Química 2, Bucheli

- Tabla de Elementos Químicos, Panchi Núñez

- Manual Técnico, ABC Estudiantil, Panchi Núñez
- Dicionario Texas Inglés-Español, Panchi Núñez

Pedidos a:

Poliediciones

Ing. Patricio Vallejo Ayala
Telf.: 2404-167 • 2404-166 • Cel.: 099 562-391
Quito - Ecuador

ISBN: 978-9978-9930-1-9